**Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.**

**Esercizi: foglio 9**

*Dott. Franco Obersnel*

**Esercizio 1** Delle seguenti funzioni si determini il dominio, l'eventuale monotonia e i segni.
a) $\log_2(x^2-1)+\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}x$.
b) $\log_{\frac{1}{2}}(2-\sqrt{3^x-1})$.
c) $\log_{\frac{1}{3}}(\operatorname{arctg} x)$.
d) $\arccos(\operatorname{arcsen}(x))$.

**Esercizio 2** Si risolvano le seguenti disequazioni.
a) $2^{x^2+5x}<4$.
b) $\operatorname{sen}(3x+1)\geq\frac{1}{2}$.
c) $\operatorname{arctg}(3x)>-1$.
d) $\operatorname{sen} x\geq\cos x$.

**Esercizio 3** Siano $f_1, f_2$ funzioni periodiche di periodo $T_1$ e $T_2$ rispettivamente.
a) Se $T_1=T_2$ cosa si può dire su $f_1\circ f_2$, $f_2\circ f_1$, $f_1+f_2$, $f_1\cdot f_2$, $\max\{f_1,f_2\}$, $|f_1|$, $f_1(|\cdot|)$?
b) Sotto quali ipotesi su $T_1$ e $T_2$ è periodica la funzione $f_1\circ f_2$, $f_2\circ f_1$, $f_1+f_2$, $f_1\cdot f_2$?
c) Sia $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; può $f_1$ essere suriettiva? E iniettiva?
d) Sia $\alpha\in\mathbb{R}^+$, qual è il periodo di $g(x):=f_1(\alpha x)$?
e) Si trovi $\alpha\in\mathbb{R}^+$ tale che $f_1(\alpha x)+f_2(x)$ sia periodica.

**Esercizio 4** Si consideri la funzione $f(x)=\operatorname{sen}(2x)-2\cos(3x)$. Si trovi il dominio di $f$. Si trovi uno zero di $f$. Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione $f$ è periodica, e in tale caso si determini un suo periodo. Si verifichi che sull'intervallo $[0,\frac{\pi}{4}]$ la funzione $f$ è monotona specificando se si tratta di crescenza o decrescenza.

**Esercizio 5** Si consideri la funzione $f(x)=\log_2(|1-\operatorname{arcsen} x|)$.
Si trovi il dominio di $f$. Si studi il segno di $f$. Si trovino eventuali intervalli sui quali $f$ è monotona. Si determini $\inf f$ e $\sup f$ e si stabilisca se $f$ ammette minimo e/o massimo. Si scriva la funzione inversa della restrizione di $f$ all'intervallo $[-1,0]$, specificandone dominio e codominio.

Soluzioni: 1. a) $]1,+\infty[$, strettamente crescente, positiva su $]\frac{1+\sqrt{10}}{3},+\infty[$.
b) $[0,\frac{\log 5}{\log 3}[$, strettamente crescente, positiva su $]\frac{\log 2}{\log 3},\frac{\log 5}{\log 3}[$.
c) $]0,+\infty[$, strettamente decrescente, positiva su $]0,\frac{\pi}{4}[$.
d) $[-\operatorname{sen}(1),\operatorname{sen}(1)]$, strettamente decrescente, positiva se $x\neq\operatorname{sen}(1)$.
2. a) $]\frac{-5-\sqrt{33}}{2},\frac{-5+\sqrt{33}}{2}[$. b) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k\pi,\frac{5\pi}{18}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k\pi]$. c) $]-\frac{1}{3}\operatorname{tg}(1),+\infty[$.
d) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi]$.
3. a) Sono tutte periodiche dello stesso periodo di $f_1$ e $f_2$, tranne $f_1(|\cdot|)$ che può non essere periodica (si pensi a $\operatorname{sen} x$). b) $f_1\circ f_2$ è $T_2-$periodica, $f_2\circ f_1$ è $T_1-$periodica. Le altre sono periodiche se e solo se $T_1$ e $T_2$ sono tra loro commensurabili, cioè se $\frac{T_1}{T_2}\in\mathbb{Q}$. c) Sì, no. d) $\frac{T_1}{\alpha}$. e) Ad esempio $\alpha=\frac{T_1}{T_2}$ (la funzione è allora $T_2-$periodica).
4. $\mathbb{R}$. $f(\frac{\pi}{2})=0$. Sì di periodo $2\pi$. Sull'intervallo $[0,\frac{\pi}{4}]$ la funzione $\sin(2x)$ è crescente e la funzione $-\cos(3x)$ è crescente, quindi la funzione $f$ è crescente
5. $[-1,1]\setminus\{\operatorname{sen}1\}$. $f(x)>0$ su $[-1,0[$, $f(0)=0$, $f(x)<0$ su $]0,\operatorname{sen}1[\cup]\operatorname{sen}1,1]$. $f$ decrescente su $[-1,\operatorname{sen}1[$ e crescente su $]\operatorname{sen}1,1]$. $\inf f=-\infty$, $\sup f=\max f=\log_2(1+\frac{\pi}{2})$. $f^{-1}_{[-1,0]}:[0,\log_2(1+\frac{\pi}{2})]\to[0,1]$, $f^{-1}_{[-1,0]}(x)=\operatorname{sen}(1-2^x)$.