Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 7

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si risolvano in $\mathbb{R}$ le disequazioni:

a) $|x+4| > 3$. b) $x^2 - 2|x| - 3 > 0$. c) $|x + |x+1| - 2| > 3$. d) $|x + |x+1| - 2| \geq 3$.
e) $\left|\dfrac{2x-5}{x+1}\right| \geq 1$.

Esercizio 2 Si verifichi che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti identità:

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right) \qquad ; \qquad \min\{x,y\} = \frac{1}{2}\left(x + y - |x-y|\right)$$

Esercizio 3

a) Siano f e g due funzioni crescenti. Si verifichi che la composta $f \circ g$ è anch'essa crescente.

b) Siano f e g due funzioni decrescenti. Si verifichi che la composta $f \circ g$ è crescente.

c) Siano f e g due funzioni crescenti. Si verifichi che la somma $f + g$ è anch'essa crescente.

d) Siano f e g due funzioni crescenti e positive. Si verifichi che il prodotto $f \cdot g$ è crescente. Si dia un esempio di funzioni crescenti il cui prodotto non è crescente.

e) Siano f e g funzioni strettamente crescenti. Si provi che sono strettamente crescenti pure le funzioni $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$.

Esercizio 4 Siano f e g funzioni iniettive. Si stabilisca motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $f + g$ è iniettiva; b) $f \cdot g$ è iniettiva; c) $f \circ g$ è iniettiva; d) $\max\{f,g\}$ è iniettiva.

Esercizio 5 Si traccino i grafici delle seguenti funzioni:

$$a)\ f(x) = \frac{x}{|x|}; \qquad b)\ f(x) = x - |x|; \qquad c)\ \sqrt{|x|}; \qquad d)\ |x + |x+1| - 2|\,.$$

Esercizio 6 Assegnate le funzioni f e g, si scrivano le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

a) $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = 2 - 3x$.

b) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x^2 + 1$.

d) $f(x) = \chi_{[0,1]}$ (dove χ è la funzione caratteristica), $g(x) = 1 - x$.

Soluzioni.

1. a) $]-\infty,-7[\cup]-1,+\infty[$. b) $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$. c) $]2,+\infty[$. d) $]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$. e) $]-\infty,-1[\cup]-1,\frac{4}{3}]\cup[6,+\infty[$.

2. Si supponga $x \leq y$. Allora, da un lato si ha $\max\{x,y\} = y$, dall'altro $|x-y| = y - x$ e quindi $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = y$. Se invece $y \leq x$ si ha $\max\{x,y\} = x$ e $|x-y| = x-y$, quindi $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = x$.

3. a) Sia $x_1 < x_2$, allora $g(x_1) < g(x_2)$ e quindi $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$. b) $x_1 < x_2$, allora $g(x_1) > g(x_2)$ e quindi $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$. c) $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$ e $g(x_1) < g(x_2)$. Usando le proprietà di campo ordinato di $\mathbb{R}$ si ottiene $f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2)$. d) $x_1 < x_2$, allora $0 < f(x_1) < f(x_2)$ e $0 < g(x_1) < g(x_2)$. Usando le proprietà di campo ordinato di $\mathbb{R}$ si ottiene $f(x_1)\cdot g(x_1) < f(x_2)\cdot g(x_1) < f(x_2)\cdot g(x_2)$. Un esempio su $\mathbb{R}$ è $f(x) = g(x) = x$. e) Sia $x_1 < x_2$, si considerino separatamente i casi $f(x_1) \geq g(x_1)$ e $f(x_1) < g(x_1)$ ....

4. a) no (es. $x + (-x)$), b) no (es. $x \cdot x$), c) sí(essendo g iniettiva $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ implica $f(x_1) = f(x_2)$, essendo f iniettiva questo implica $x_1 = x_2$), d) no (es. $\max\{x,-x\}$).

6. a) $6x-1$, $6x-7$. b) $\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$, $\frac{1}{3x^2-2x}$. c) $\operatorname{sen}(2x^2+1)$, $2\operatorname{sen}^2(x)+1$. d) $\chi_{[0,1]}$, $\chi_{\mathbb{R}\setminus[0,1]}$.