Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: numeri complessi I

Dott. Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|, \bar{z}, \Re e\, z$ e $\Im m\, z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z, per cui $z = \Re e\, z + i\,\Im m\, z$, $\bar{z} = \Re e\, z - i\,\Im m\, z$, $|z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2}$)

Esercizio 1 Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

a) $1 < \left|\dfrac{z}{z-i}\right| < 2,$ *b)* $\Im m\left(\dfrac{z}{i\,\bar{z}}\right) \geq 0,$ *c)* $z^3|z| = i\bar{z},$

d) $z^2 + 2|z|^2 - (\bar{z})^2 = 1 + (\Re e\, z)^2 - 2(\Im m\, z)^2,$ *e)* $|iz+1| > |2\bar{z}+i|,$

f) $z^4 = i\bar{z}.$ *g)* $z^2 - \bar{z}^2 = 2i|z|^2,$ *h)* $i \cdot z^4 + \bar{z} \cdot |z|^2 = 0,$

i) $|z+\bar{z}| > z\bar{z},$ *j)* $z^5 + i\bar{z}|z| = 0.$

Esercizio 2 Si determinino le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 + i\,w + z = 0 \\ w - i\,z + 1 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 Si ponga, per ogni $z \in \mathbb{C}, \setminus\{1\}$ $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}-1}$. Si determini la controimmagine, $f^{-1}(A)$, dell'insieme $A = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$.

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{i(z+\bar{z})^2}.$$

Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss il dominio di f e l'insieme dei punti nei quali $f(z) > 0$, dopo aver constatato che $f(z)$ assume solamente valori reali.

Esercizio 5 Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{|z|-1}{z^2 - i}.$$

Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss il dominio di f e la controimmagine tramite f di 0.

Esercizio 6 Si calcoli l'area del triangolo individuato nel piano di Gauss dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^2}{|z|} = i|z|\bar{z}.$$

Soluzioni: (Qui $z = x + iy = \rho\, e^{i\vartheta}$.)

1. a) $y > \frac{1}{2}$ e $x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 > \frac{4}{9}$. b) $|y| \geq |x|$. c) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{\pi + 4k\pi}{8}, k = 0, 1, 2, 3$. d) $\pm i\frac{1}{2}, \pm 1$. e) $x^2 + (y - \frac{1}{3})^2 < \frac{1}{9}$. f) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{\pi + 4k\pi}{10}, k = 0, 1, 2, 3, 4$. g) $y = x$. h) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{\pi + 4k\pi}{10}, k = 0, 1, 2, 3, 4$. i) $(x+1)^2 + y^2 < 1$ oppure $(x-1)^2 + y^2 < 1$. j) $z = 0$ oppure $\rho = 1$, $\vartheta = \frac{-\pi + 4k\pi}{12}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2. $(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}+2}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3. $\{\frac{1}{2} + i\,t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4. $dom f = \{z \in \mathbb{C} \mid x \neq 0\}$, $f(z) > 0$ se e solo se $xy > 0$.

5. $dom f = \{z \in \mathbb{C} \mid x \neq \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\}$, $f^{-1}(\{0\}) = \{e^{i\vartheta} \mid \vartheta \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

6. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.