Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 5

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1

a) (Proprietà di Archimede) Si provi che per ogni coppia di numeri reali positivi a, b esiste un numero naturale positivo n tale che $na > b$.

b) Si provi che per ogni numero reale positivo ε esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{-n} < \varepsilon$.

Esercizio 2 (Densità in $\mathbb{R}$)

a) Si provi che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $x < r < y$.

b) Si provi che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esistono $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ tali che $x < \frac{m}{2^n} < y$.

Esercizio 3 Si usi il principio di induzione per verificare la validità delle seguenti formule:

a) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha $2^{n-1} \leq n!$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

d) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Esercizio 4

a) Si calcoli

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

b) Si verifichi che

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{n!}{j!(k-j)!(n-k)!} a^j b^{k-j} c^{n-k}.$$

c) Si dimostri che, per ogni n fissato, la somma dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$, con k pari, $0 \leq k \leq n$, è uguale alla somma dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$, con k dispari, $0 \leq k \leq n$. (Sugg.: si consideri $(1-1)^n$)

d) Si dimostri che ogni prodotto di k numeri interi positivi consecutivi è divisibile per $k!$.

e) Si dimostri la formula $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ per via puramente combinatoria.

Soluzioni:

1. a) Sia $c = \frac{b}{a}$; per l'illimitatezza di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ esiste $n > c$. b) È sufficiente osservare che $2^n > n$ per ogni n e applicare Archimede.

2. a) Si consideri $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$ e si applichi la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ per ottenere $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r\sqrt{2} < y$. Evidentemente $r\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Si ripercorra la dimostrazione del teorema sulla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$; fissato n tale che $2^{-n} < y - x$ (vedi esercizio 1 b) si prenda $m = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq 2^n x\}$ e si verifichi che $x < \frac{m+1}{2^n} < y$.

3. a) Vero per $n = 1$. Sia vero per n: $2^{n-1} \leq n!$. Allora $2^{(n+1)-1} = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!$. b) Vero per $n = 1$. Sia vero per n: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Allora $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \ldots$.

c) si usi la formula già nota per $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

4. a) 3^n. b) Si applichi Newton a $((a+b)+c)^n$ e poi di nuovo all'interno della sommatoria a $(a+b)^k$. c) Si applichi Newton a $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$. d) Si osservi che il quoziente cercato è pari a $\binom{n}{k}$ per qualche n, e tale numero è necessariamente un intero. e) Sia A un insieme di n elementi. Si costruisca una biiezione f tra l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A con k elementi e l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A con $n-k$ elementi, ponendo $f(E) = \mathcal{C}(E)$ (il complementare di E in A).