Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 4

Prof. Franco Obersnel

Esercizio 1 Negli insiemi A che seguono, si dica se sono limitati (inferiormente, superiormente) nel soprainsieme indicato. Nel caso in cui risultino limitati (inferiormente, superiormente) si dica se ammettono estremo inferiore e estremo superiore, e si dica se ammettono minimo e massimo.

a) $A =]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$. b) $A =]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$.

c) $A = [a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$. d) $A =]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$.

e) $A = \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{Z}$; $A \subseteq \mathbb{Q}$. f) $A = [-\sqrt{3}, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{Q}$; $A \subseteq \mathbb{Q}$.

g) $A = [-\sqrt{3}, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{Q}$; $A \subseteq \mathbb{R}$. h) $A = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $A \subseteq \mathbb{Z}$. i) $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$; $A \subseteq \mathbb{Q}$.

j) $A = \{$ insiemi con non più di 4 elementi$\}$; $A \subset \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f\})$, dove $\mathcal{P}(\{a, b, c, d, e, f\})$ indica l'insieme delle parti di un insieme con 6 elementi, ordinato per inclusione.

k) $A = \{$numeri primi$\}$, $A \subset \mathbb{N}$ con l'ordinamento dato da $x < y$ se e solo se y è divisibile per x.

Esercizio 2 Per i seguenti insiemi $A \subseteq \mathbb{R}$, si verifichi che $\inf A$ e $\sup A$ sono quelli indicati tra le parentesi, e si stabilisca se sono anche minimo e massimo di A.

a) $A = (\mathbb{Z} \cap]-\infty, \pi]) \setminus \mathbb{Q}^-$. $(0,\ 3)$

b) $A = \{\dfrac{x}{x-2} \mid x \in \mathbb{R}^-\}$. $(0,\ 1)$.

c) $A = \{\dfrac{n^2 - n}{2 + n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. $(0,\ +\infty)$.

d) $A = \{\cos(\dfrac{\pi}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. $(-1,\ 1)$.

Esercizio 3 Si stabilisca se le seguenti coppie di insiemi sono separate ed eventualmente contigue, motivando la risposta.

a) $A = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, $B = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

b) $A = \mathbb{Q}^-$, $B = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : m, n \in \mathbb{N}^+, m < n^2\}$.

c) $A =]0, 2[$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\}$.

Esercizio 4 Siano A e B sottoinsiemi separati di $\mathbb{R}$ (cioè per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha $a \leq b$). Si provi che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) $\sup A = \inf B$ (cioè A e B sono insiemi contigui);

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a_\varepsilon \in A$ e $b_\varepsilon \in B$ tali che

$$b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon.$$

Soluzioni

1. a) Limitato inferiormente, illimitato superiormente, $\inf A = a$, non ha minimo. b) Illimitato inferiormente, limitato superiormente, $\sup A = a$, non ha massimo. c) Limitato inferiormente, illimitato superiormente, $\min A = a$. d) Illimitato inferiormente, limitato superiormente, $\max A = a$. e) Limitato inferiormente, illlimitato superiormente, $\inf A = 0$, non ha minimo. f) Limitato, non ha inf, $\max A = \frac{3}{2}$. g) Limitato, $\inf A = -\sqrt{3}$, non ha min, $\max A = \frac{3}{2}$. h) Illimitato inferiormente, limitato superiormente, $\max A = -1$. i) Limitato, $\inf A = -1$, non ha minimo, $\max A = \frac{3}{2}$. j) Limitato, $\min A = \emptyset$, $\sup A = \{a, b, c, d, e, f\}$, non ha massimo. k) Limitato inferiormente, illimitato superiormente, $\inf A = 1$, non ha minimo (si ricordi che 1 non è un numero primo).)

2. a) min e max. b) no min, no max. c) min. d) min, no max.

3. a) separati non contigui, b) contigui, c) non separati.

4. Sia $\alpha = \sup A$ e $\beta = \inf B$. Evidentemente si ha $\alpha \leq \beta$.

Supponiamo vera (i). Allora $\alpha = \beta$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per le proprietà del sup e dell' inf, applicate con $\varepsilon/2$, esistono $a_\varepsilon \in A$ e $b_\varepsilon \in B$ con $a_\varepsilon > \alpha - \varepsilon/2$ e $b_\varepsilon < \beta + \varepsilon/2$; perciò $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$; quindi vale (ii).

Supponiamo vera (ii) e, per assurdo, si assuma $\alpha \neq \beta$. Allora $\alpha < \beta$; si prenda $\varepsilon < \beta - \alpha$. Poiché vale (ii) esistono $a_\varepsilon \in A$ e $b_\varepsilon \in B$ con $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon < \beta - \alpha$ mentre si ha $b_\varepsilon \geq \beta$ e $a_\varepsilon \leq \alpha$, contraddizione.