Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 3

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $(K, +, \cdot)$ un campo. Si provino le seguenti proprietà di $(K, +, \cdot))$:
a) (Legge di semplificazione per la somma) Per ogni $x,\ y,\ z \in K$, $x + y = x + z \Rightarrow y = z$.

b) (Legge di semplificazione per il prodotto) Per ogni $x,\ y,\ z \in K$, $x \neq 0$, $x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$.

c) (Legge di annullamento del prodotto) Per ogni $x,\ y \in K$, $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0$.

Esercizio 2
a) Sia $(K, \leq)$ un insieme ordinato e sia $X \subset K$ un insieme dotato di minimo $m = \min X$. Si provi che ogni sottoinsieme $A \subset X$ è inferiormente limitato in K.

b) Sia $(K, \leq)$ un insieme totalmente ordinato. Si provi che ogni sottoinsieme finito di K ammette minimo e massimo. Si dia un esempio di un insieme ordinato e di un sottoinsieme finito che non ammette minimo.

d) (Regole dei segni) Per ogni $x \in K$, $-x = (-1) \cdot x$. Per ogni $x,\ y \in K$, $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

Esercizio 3 Sia $(K, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Si provino le seguenti proprietà di $(K, +, \cdot, \leq)$:

a) Per ogni $x \in K$, $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$. b) Per ogni $x \in K$, $x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$.
c) Per ogni $x,\ y \in K$, $0 < x < y \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. d) Per ogni $x \in K$, $x^2 \geq 0$ e $x^2 > 0$ se $x \neq 0$.

Esercizio 4 Si provi che se $p \in \mathbb{N}$ è un numero primo, allora non esiste alcun numero razionale $x = \frac{m}{n}$ tale che $x^2 = p$ (cioè $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$).

Soluzioni 1. c) $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, e applico a); viceversa sia $x \neq 0$, da $y \cdot x = 0$ moltiplico per $\frac{1}{x}$. d) $(-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x$, quindi $(-1) \cdot x$ è l'opposto di x.)

2. a) m è limitazione inferiore per A. b) Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Poiché A è totalmente ordinato, posso confrontare tutti gli elementi a due a due e decidere qualè il più piccolo di questi. Un esempio di insieme finito che non ha minimo è l'insieme $X = \{a, b\}$, dove la relazione d'ordine è definita da $a \leq a$ e $b \leq b$ (a e b non confrontabili): chiaramente non esiste minimo di X.

3. a) Sommo $-x$. b) Se fosse $\frac{1}{x} < 0$ otterrei $1 < 0$. c) Moltiplico per $\frac{1}{x}$ e per $\frac{1}{y}$.

4. Si procede come nel caso $p = 2$ utilizzando il fatto che se un numero primo p divide un prodotto di due numeri, allora deve dividere almeno uno dei due fattori.