Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi : foglio 2

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si considerino le seguenti funzioni; si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biiettive.
a) $f : \{studenti\ del\ corso\} \to \{0,1\}$; $f(x) = 0$ se x è maschio, $f(x) = 1$ se x è femmina.
b) $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
c) $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

Esercizio 2 Sia A un insieme, $A \subset X$; si definisce funzione caratteristica di A la funzione così definita: $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$.

a) Si provi che $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.
b) Come si può scrivere $\chi_{A\cup B}$ come combinazione algebrica di χ_A e χ_B? c) E $\chi_{A\triangle B}$?

Esercizio 3 Sia $f : X \to Y$ una funzione, $A; B \subseteq X$, $A', B' \subseteq Y$; si provino le proposizioni seguenti:
a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$;

b) non è vero che $f(A) \subset f(B) \Rightarrow A \subset B$ (si trovi un controesempio).

c) $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$;

d) non è vero che $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B') \Rightarrow A' \subset B'$ (si trovi un controesempio).

e) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ però non è vero che $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ (si trovi un controesempio).

Esercizio 4 Siano $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$.
a) $f([-1,2] \setminus \{0\}) =$

b) $f^{-1}(]0,1[) =$

c) $g(]\frac{\pi}{2}, 3\pi] \setminus \{0\}) =$

d) $g^{-1}(]\frac{1}{2}, 1[) =$

Esercizio 5 a) Si provi che una funzione $f : A \to B$ è suriettiva se e solo se verifica la seguente proprietà: "per ogni coppia di funzioni $g_1, g_2 : B \to C$, con C insieme qualsiasi, se $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ allora $g_1 = g_2$."
b) Si provi che una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se verifica la seguente proprietà: "per ogni coppia di funzioni $g_1, g_2 : C \to A$, con C insieme qualsiasi, se $f \circ g_1 = f \circ g_2$ allora $g_1 = g_2$."

Soluzioni 1. a) suriettiva (se c'è almeno una ragazza e almeno un ragazzo), non iniettiva. b) non iniettiva ($f(-1) = f(1)$; non suriettiva $0 \notin Im(f)$). c) biiettiva,

2. a) Se $x \in A \cap B$ si ha $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$. b) Ad esempio $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$. c) Ad esempio $\chi_{A\triangle B} = |\chi_A - \chi_B|$.

3. a) Sia $y \in f(A)$. Allora esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Poiché $A \subset B$ si ha $x \in B$ e quindi $y = f(x) \in f(B)$. b) Ad esempio $f(x) = x^2$, $A = [-1,1]$, $B = [0,2]$. c) $\Rightarrow$ Sia $x \in f^{-1}(A')$, allora $f(x) \in A' \subset B'$ e quindi $x \in f^{-1}(B')$. d) Ad esempio $f(x) = x^2$, $A' = [-1,1]$, $B' = [0,4]$. e) Sia $x \in A \cap B$, allora $x \in A$ e quindi $f(x) \in f(A)$, $x \in B$ e quindi $f(x) \in f(B)$; perciò $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Come controesempio si può considerare $f(x) = x^2$, $A = \{-1\}$, $B = \{1\}$.

4. a) $]-\infty,-1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$. b) $]1, +\infty[$. c) $[-1,1]$. d) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{1+12k}{6}\pi, \frac{5+12k}{6}\pi[$.

5. a) Sia f suriettiva; per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$; dunque si ha $g_1(y) = g_2(y)$ per ogni $y \in B$. Se f non è suriettiva sia $y \notin Im(f)$ e si definiscano g_1, g_2 uguali su imf ma tali che $g_1(y) \neq g_2(y)$. b) Sia f iniettiva; allora $f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \Rightarrow g_1(x) = g_2(x)$. Sia f non iniettiva e siano x_1, x_2 tali che $f(x_1) = f(x_2)$; si definiscano $g_1, g_2 : \{0\} \to A$ tali che $g_1(0) = x_1$ e $g_2(0) = x_2$.