Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 1

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si considerino gli insiemi indicati in ogni gruppo e si scriva ogni possibile relazione di inclusione tra di essi.

a) $A = \{3n \mid 1 \leq n \leq 30\}$, $B = \{3^n \mid 1 \leq n \leq 4\}$, $C = \{n^2 \mid n = 3, 9\}$, $D = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq \pi\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq \pi\}$, $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = \pi\}$, $D = \{2x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq \pi\}$.

c) $A = \{\{1\}, \{0, 1\}, 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \mathcal{P}(B)$, $D = A \cap B$, $E = A \cap C$, $F = A \setminus \{0\}$.

Esercizio 2

a) Si provi che se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$, allora $B = C$.

b) Si provi che $((A \cap B) \cup C) \cap (A \cap (B \cup C)) = A \cap (B \cup C)$.

Esercizio 3 Si calcolino esplicitamente:

a) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]0, \frac{1}{n}\right] =$ b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right[=$ c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right[=$

Esercizio 4 Siano $A, B \subset U$.

a) Si calcoli $A \triangle A =$

b) Si calcoli $A \triangle \mathcal{C}(\mathcal{A}) =$

c) Si provi che $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) = B \triangle (A \triangle C)$.

Esercizio 5 Si scrivano le corrispondenti negazioni logiche:

a) $\forall x \in A\ \exists y \in B\ P(x, y)$.

b) $\exists x \in A\ \forall y \in B\ P(x, y)$.

c) $\exists x \in A (P(x) \Rightarrow \exists y \in B\ P(x, y))$.

Soluzioni

1. a) $C \subset B \subset A \subset D$. b) $C (= \emptyset) \subset B \subset A$; $C \subset B \subset D$. c) $D \subset B, D \subset A$, $E \subset A, E \subset C$, $F = E$.

2. a) Sia $x \in B$, proviamo che $x \in C$. Sia $x \in A$, allora $x \in A \cap B = A \cap C$, e quindi $x \in C$. Sia ora $x \notin A$; poiché $x \in A \cup B = A \cup C$ si ha $x \in C$. In modo del tutto simile si prova che se $x \in C$ allora $x \in B$. b) Equivale a provare che $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$. Sia $x \in A \cap (B \cup C)$, allora $x \in A$. Se $x \in B$ si ha $x \in A \cap B$, se $x \notin B$ allora $x \in C$ e quindi $x \in (A \cap B) \cup C$ in ogni caso.

3. a) $\emptyset$. b) $\{0\}$. c) $]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$.

4. a) $\emptyset$. b) U. c) Si può ad esempio osservare che ciascuno degli insiemi indicati è uguale a $\{(A \cup B \cup C) \setminus [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]\} \cup (A \cap B \cap C)$, e tale scrittura è simmetrica rispetto a A, B, C.

5. a) $\exists x \in A$ tale che $\forall y \in B$ non $P(x, y)$. b) $\forall x \in A\ \exists y \in B$ tale che non $P(x, y)$. c) $\forall x \in A\ P(x)$ e $\forall y \in B$ non $P(x, y)$.