Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

(*i*) Si determini l'insieme di convergenza puntuale E della serie.

Applichiamo il criterio della radice $n-$esima, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{|x|}{2}\right)^n} = \frac{|x|}{2},$$

pertanto la serie converge se $|x| < 2$. Se $|x| = 2$ la serie non converge perché

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(*ii*) Si stabilisca se la convergenza è uniforme su E.

No. Se la convergenza fosse uniforme, la successione dei termini generali dovrebbe essere uniformemente infinitesima. Quindi, fissato ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$, esisterebbe n_ε tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$, per ogni $x \in \,]-2, 2[$, si avrebbe

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Prendendo il limite per $x \to 2$ si ottiene la contraddizione

$$1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2}.$$

(*ii*) Si detta $f(x)$ la somma della serie, si provi che $2 < f(1) < e$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ (se $n \geq 2$ si ha anche $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$). Perciò

$$2 = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n < \sum_{n=1}^{+\infty} e\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2e.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^4 - x^2 - y^2$.

(i) Si determinino:

• il gradiente di f:

$$\nabla f(x) = (4x^3 - 2x, -2y)^T$$

• la matrice Hessiana di f:

$$H(f)(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

• eventuali punti critici di f e la loro natura:

Ci sono tre punti critici, $(0,0)^T$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$. L'origine è un punto di massimo. I due punti diversi dall'origine sono punti di sella.

(ii) Al variare di $r > 0$ si determinino i valori massimo e minimo della funzione f ristretta al disco

$$D_r = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Sul bordo del disco si ha $x^2 + y^2 = r^2$, quindi la funzione ristretta si può esprimere, per $|x| \leq r$, come

$$h(x) = x^4 - r^2.$$

Chiaramente, la funzione h ha massimo per $|x| = r$, $\max h = r^4 - r^2$, e minimo per $x = 0$, $\min h = -r^2$.
Se $r < 1$, si ha $r^4 - r^2 = r^2(r^2 - 1) < 0$, pertanto $\max f_{D_r} = f(0,0) = 0$ e $\min f_{D_r} = f(0, \pm r) = -r^2$.
Se $r \geq 1$, si ha $r^4 - r^2 \geq 0$, pertanto $\max f_{D_r} = f(\pm r, 0) = r^4 - r^2$ e $\min f_{D_r} = f(0, \pm r) = -r^2$.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il campo vettoriale

$$g(x,y,z) = \big(2xz, -2xy, 2z - xz\big)^T.$$

(i) Si calcolino rotore e divergenza del campo g.

$$rot\, g(x,y,z) = \big(2, 2x+z, -2y\big)^T; \quad div\, g(x,y,z) = -3x + 2z + 2$$

(ii) Si calcoli il flusso del campo g che attraversa dall'alto verso il basso il disco

$$D = \big\{(x,y,-1)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\big\}.$$

Possiamo parametrizzare il disco $\sigma : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(\vartheta,\rho) = (\rho\cos(\vartheta), \rho\,\mathrm{sen}(\vartheta), -1)^T$. Con questa scelta il vettore normale è $\nu(\rho,\vartheta) = (0,0,-\rho)^T$. La parametrizzazione ha il verso richiesto (con la normale verso il basso). Calcoliamo il flusso:

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \big(2(-1) - \rho\cos(\vartheta)(-1)\big)(-\rho)\, d\rho \Big)\, d\vartheta = 2\pi.$$

(iii) Si calcoli il flusso del campo g che attraversa dal basso verso l'alto la superficie conica

$$\big\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z+1 \ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2} + z = 0\big\}.$$

Consideriamo il solido S racchiuso dalla superfiicie conica e dal tappo D descritto nel punto (ii). Il flusso uscente dal solido S si calcola applicando il teorema della divergenza (nell'integrale possiamo trascurare il termine $-3x$ per questioni di simmetria)

$$\iiint_S (-3x + 2z + 2)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S (2z+2)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \Big(\int_{-1}^{-\sqrt{x^2+y^2}} (2z+2)\, dz \Big)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 (\rho^3 + \rho - 2\rho^2)\, d\rho \Big)\, d\vartheta = 2\pi\Big(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{6}$$

Il flusso richiesto sarà pertanto $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$.

In alternativa si poteva calcolare il flusso direttamente. Parametrizziamo il cono $\sigma : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(\rho,\vartheta) = (\rho\cos(\vartheta), \rho\,\mathrm{sen}(\vartheta), -\rho)^T$. Con questa scelta il vettore normale è $\nu(\rho,\vartheta) = (\rho\cos(\vartheta), \rho\mathrm{sen}(\vartheta), \rho)^T$. La parametrizzazione ha il verso richiesto (con la normale verso l'alto). Calcoliamo il flusso:

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \big(-2\rho^3\cos^2(\vartheta) - 2\rho^2\cos^2(\vartheta)\,\mathrm{sen}(\vartheta) - 2\rho^2 + \rho^3\cos(\vartheta) d\vartheta \big)\, d\rho \Big)\, d\vartheta = -\frac{11}{6}\pi.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \leq 1; \\ \frac{1}{y} & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri il problema di Cauchy

$$(CP_{y_0}) \qquad \begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(i) Si stabilisca se è vero che per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ il problema (CP_{y_0})

$\star$ ammette almeno una soluzione:

Vero, perché la funzione f è continua.

$\star$ ammette un'unica soluzione:

Vero, perché la funzione f è Lipschitziana (esistono finite le derivata destra e sinistra in ogni punto).

$\star$ ammette una soluzione globale definita su tutto $\mathbb{R}$:

Vero, perché la funzione f è sottolineare (è lineare per $y < 1$ e limitata per $y \geq 1$.

(ii) Si calcoli la soluzione φ del problema (CP_{y_0}) con $y_0 = 0$, e si calcoli il valore $\varphi(2)$.

La soluzione è la costante 0. In particolare si ha $\varphi(2) = 0$.

(iii) Si calcoli la soluzione ψ del problema (CP_{y_0}) con $y_0 = \frac{1}{2}$, e si calcoli il valore $\psi(2)$.

La soluzione vicino a $x = 0$ è $y(x) = \frac{1}{2}e^x$. Questa funzione è crescente, quindi, per $x < 0$, verifica sempre la condizione $y(x) < 1$; pertanto si ha $\psi(x) = \frac{1}{2}e^x$ su $]-\infty, 0]$. A destra di 0 la soluzione sarà $\frac{1}{2}e^x$ fino a quando resta $y(x) \leq 1$, cioè fino al punto $x = \log 2$. A questo punto si deve risolvere il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y}, \\ y(\log 2) = 1, \end{cases}$$

che ha come soluzione la funzione $y(x) = \sqrt{1 + 2(x - \log 2)}$.

Pertanto la soluzione cercata è la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{se } x \in\,]-\infty, \log 2]; \\ \sqrt{1 + 2(x - \log 2)} & \text{se } x \in\,]\log 2, +\infty[. \end{cases}$$

Si calcola infine $\psi(2) = \sqrt{5 - 2\log 2}$.