Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la successione di funzioni $\big(f_n\big)_{n\geq 1}$, con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^2}.$$

(i) Si calcoli il limite puntuale $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ e si stabilisca, motivando la risposta, se la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$; la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$, infatti, posto $x = n$ si ha $f_n(n) = \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq 1$.

(ii) Si determini l'insieme di convergenza E della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
$\mathbb{R}$. Infatti, per ogni x fissato si ha $|f_n(x)| \leq x^2 \frac{1}{n^2}$, termine generale di una serie armonica generalizzata convergente.

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie converge uniformemente sull'insieme $E \cap\,]-3, 2[$.
Sì. Per l'$M-$test di Weierstrass, essendo $|f_n(x)| \leq x^2 \frac{1}{n^2} \leq 9 \frac{1}{n^2}$. In effetti, si ha la convergenza uniforme su ogni compatto di $\mathbb{R}$, ma non su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = y^4 + 2y^2\,(x^2+1) + (x^2-1)^2$$

(i) Si determinino:

• il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \big(4x(y^2+x^2-1), 4y(y^2+x^2+1)\big)^T$$

• la matrice Hessiana di f:

$$H(f)(x,y) = 4\begin{vmatrix} y^2+3x^2-1 & 2xy \\ 2xy & 3y^2+x^2+1 \end{vmatrix}$$

• eventuali punti critici di f e la loro natura:

$(0,0)^T$, punto di sella; $(-1,0)^T$ e $(1,0)^T$ punti di minimo.

• gli estremi assoluti di f:

Si osservi che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y)^T \in \mathrm{I\!R}^2$; si ha quindi $\min f = f(\pm 1, 0) = 0$. Inoltre si osserva facilmente che $\sup f = +\infty$.

(ii) Al variare di $\alpha \in \mathrm{I\!R}$ si consideri la curva di livello $L_\alpha = \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 : f(x,y) = \alpha\}$.

• Si determinino i parametri $\alpha \in \mathrm{I\!R}$ per i quali L_α è una curva regolare parametrizzabile localmente in ogni punto come grafico di una funzione.

Per il teorema di parametrizzabilità locale gli unici problemi si possono avere nei punti critici di f. Calcolando la funzione in questi punti si ha $f(\pm 1, 0) = 0$ e $f(0,0) = 1$, quindi soltanto nei casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ potrei avere problemi. Si può osservare che $L_0 = \{(-1,0)^T, (1,0)^T\}$ è una coppia di punti, mentre $L_\alpha = \emptyset$ se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 1$ l'origine è un punto di sella per f, quindi la curva L_1 non è parametrizzabile localmente in $(0,0)$ come grafico di una funzione. In conclusione la risposta corretta è $\alpha \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

• Si determini l'equazione della retta tangente la curva L_{32} nel punto $(1,2)^T$.

L'equazione è $\langle \nabla f(1,2), (x-1, y-2)^T \rangle = 0$, cioè $x + 3y - 7 = 0$.

COGNOME e NOME ____________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il campo vettoriale $g(x,y) = \left(xy - \frac{1}{3}x^3, x^2y - y\right)^T$

(i) Si calcolino $rot(g)$ e $div(g)$.

$rotg = (0, 0, 2xy - x)^T$; $divg = y - 1$.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto dal campo g su una particella che dall'origine $(0,0)^T$ raggiunge il punto $(1,1)^T$ percorrendo il segmento di bisettrice del primo e terzo quadrante.

Si può parametrizzare il segmento come $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t,t)^T$. Pertanto

$$\int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds = \int_0^1 \left(t^2 + \frac{2}{3}t^3 - t\right) dt = 0$$

(iii) Si calcoli il lavoro compiuto dal campo g su una particella che percorre il bordo, orientato positivamente, dell'insieme

$$E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \le 1, \, |x| \le y\}$$

Usiamo la formula di Gauss-Green:

$$\int_{\partial E} \langle g, \tau \rangle \, ds = \iint_E (2xy - x) \, dxdy = \int_{-1}^1 x \Big(\int_{|x|}^{1+\sqrt{1-x^2}} (2y-1) \, dy \Big) \, dx = 0,$$

l'ultimo integrale è evidentemente 0 perché la funzione integranda è dispari in x su un insieme simmetrico rispetto alla x.

(iv) Si calcoli il flusso del campo g uscente dall'insieme E.

Usiamo la formula della divergenza di Gauss:

$$\int_{\partial E} \langle g, \nu \rangle \, ds = \iint_E (y-1) \, dxdy = \int_{-1}^1 \Big(\int_{|x|}^{1+\sqrt{1-x^2}} (y-1) \, dy \Big) \, dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(1 - 2x^2 + \sqrt{1-x^2} + |x|\right) dx = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri l'equazione differenziale

$$(E) \quad y' = (1 - y^2)\,\mathrm{sen}\,x.$$

(*i*) Si determinino gli equilibri (cioè le soluzioni costanti) dell'equazione.

Gli equilibri sono soluzioni costanti, quindi devono risolvere l'equazione $0 = y'(x) = (1 - y^2)\,\mathrm{sen}\,x$ per ogni x e quindi abbiamo due equilibri: $y = \pm 1$

(*ii*) Si stabilisca per quali valori $a \in \mathbb{R}$ il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo per la soluzione del problema di Cauchy di (E) con condizione iniziale $y(0) = a$.

Sia 0 punto di minimo relativo, allora deve essere $y'(0) = 0$ e $y''(0) \geq 0$. Si ha $0 = y'(0) = (1 - a^2)\,\mathrm{sen}\,0 = 0$ per ogni a. Inoltre

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\Big((1 - y(x)^2)\,\mathrm{sen}\,x\Big) = -2y(x)y'(x)\,\mathrm{sen}\,(x) + (1 - y(x)^2)\,\cos(x),$$

quindi $y''(0) = 1 - a^2$. Si ha $y''(0) \geq 0$ se e solo se $|a| \leq 1$. Osserviamo che per $|a| = 1$ abbiano soluzioni costanti, quindi per queste il punto $x = 0$ è punto di minimo (non stretto). Invece, per $|a| > 1$, la soluzione avrà in 0 un punto di massimo relativo.

(*iii*) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy di (E) con condizione iniziale $y(0) = 0$

Possiamo dividere per $1 - y^2$ in quanto $y(0) \neq \pm 1$. Integrando si ottiene

$$\int_0^x \frac{y'(x)}{1 - y(x)^2}\,dx = \int_0^{y(x)} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\Big)\,dy = 1 - \cos x$$

e quindi

$$\log\Big|\frac{1 + y(x)}{1 - y(x)}\Big| = 2(1 - \cos x); \qquad y(x) = \frac{\exp(2(1 - \cos x)) - 1}{1 + \exp(2(1 - \cos x))}.$$

(*iv*) Si spieghi perché che ogni soluzione di (E) tale che $y(0) \geq 0$ verifica $y(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per il teorema del confronto delle soluzioni, detta y_0 la soluzione del problema con $y(0) = 0$ si avrà $y(x) \geq y_0(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. 0 è punto di minimo relativo per y_0, ma anche assoluto come si verifica facilmente (la soluzione è periodica di periodo 2π, basta guardare il segno della derivata su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Poiché $y_0(0) = 0$ si conclude. Si poteva anche dimostrare direttamente dall'espressione analitica della soluzione che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $y_0(x) \geq 0$. Infatti si ha $\exp(2(1 - \cos x)) - 1 \geq 0$ se e solo se $2(1 - \cos x) \geq 0$, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$.