Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1}\big(\cos(x)\big)^n$.

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

(ii) Si stabilisca se la convergenza della serie su E è uniforme.

(iii) Definita $f : E \to \mathbb{R}$ la somma della serie, si stabilisca se in un intorno sufficientemente piccolo del punto $\frac{\pi}{2}$ la funzione f è crescente, decrescente oppure f non è localmente monotona in $\frac{\pi}{2}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 e^y - xy$.

(i) Si calcolino il gradiente e la matrice Hessiana di f.

(ii) Si determinino i punti critici di f diversi dall'origine e se ne studi il carattere.

(iii) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione f nell'origine.

(iv) Si verifichi che l'origine è un punto di sella per f (suggerimento: si consideri ad esempio la direzione del vettore $(1, 2)^T$).

COGNOME e NOME ____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$(E) \quad y' = xy(y-1)$$

(i) Si trovino tutti gli equilibri dell'equazione (cioè le soluzioni costanti).

(ii) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, indichiamo con ϕ_α la soluzione di (E) che soddisfa la condizione iniziale $\phi_\alpha(0) = \alpha$. Si provi che per ogni α la funzione ϕ_α ha nel punto $x = 0$ un punto critico. Si determinino i parametri α per cui $x = 0$ è un punto di minimo e i parametri α per cui $x = 0$ è un punto di massimo.

(iii) Si determinino le soluzioni ϕ_α per $\alpha = -1$ e per $\alpha = \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO N. 4. Si considerino il campo vettoriale $g(x,y,z) = \big(x\cos z, 2z\cos y, z^2 \operatorname{sen} y\big)^T$ e la superficie di rotazione S ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva del piano xz di equazione $x = \cos z$, definita per $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(i) Si calcolino rotore e divergenza di g.

(ii) Si stabilisca se il campo g è conservativo.

(iii) Si calcoli il volume del solido racchiuso dalla superficie S.

(iv) Si calcoli il flusso del campo g uscente dalla superficie S.