Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri, per $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{xn}{n + x\sqrt{n}}.$$

(i) Si provi che la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente e si calcoli $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(ii) Si provi che la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su ogni intervallo compatto $[0, a]$, $a > 0$.

(iii) Si verifichi che la successione $(f_n)_n$ non è uniformemente convergente su $[0, +\infty[$.

(iv) Si calcoli, giustificando la risposta, il limite $\lim_{n\to+\infty} \left(n \int_0^1 \frac{x}{n + x\sqrt{n}}\, dx \right)$.

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli il baricentro del solido omogeneo

$$E = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 - z^2 \le x^2 + y^2 \le 1 + z^2,\, 0 \le z \le 2\right\}.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO

COGNOME e NOME ____ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

Si considerino il campo scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da $f(x,y) = y^2 - x^2$ e il problema di Cauchy

$$(CP) \begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(i) Si studino gli zeri e i segni di f.

(ii) Si provi che la soluzione φ di (CP) ha in $x = 1$ un punto di massimo relativo.

(iii) Sia φ la soluzione di (CP). Si verifichi che sull'intervallo $[1, +\infty[$ la funzione φ è decrescente e si ha $-x \le \varphi(x) \le x$ per ogni $x \ge 1$.

(iv) Si calcoli la soluzione del problema linearizzato di (CP) (cioè $y' = \tilde{f}(x,y)$, $y(1) = 1$, dove $\tilde{f}$ è l'approssimante lineare di f nel punto $(1,1)^T$).

ESERCIZIO N. 4. Si considerino le funzioni $\varphi : [1,2] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite da

$$\varphi(s,t) = (s\cos t, 2\sqrt{s}, s\sin t)^T, \quad f(x,y,z) = 3(x^2+z^2) + \frac{1}{2}(x^2+z^2)y^2 + \frac{1}{4}y^2.$$

(*i*) Si verifichi che φ è la rapprentazione parametrica di una superficie regolare e si calcoli l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_\varphi f\,d\sigma$.

(*ii*) Si determinino il minimo e il massimo di f vincolati al sostegno di φ.