Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________	

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la funzione $f :]0,+\infty[$ definita da $f(x) = \min\{x, \frac{1}{x}\}$ e la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}xf(x)\right)^n}{2n}.$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

$E =]0,+\infty[$. Infatti, se $x \in]0,1]$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}xf(x)\right)^n}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^n}{n}$, che è convergente per ogni $x \in]0,1]$, mentre, se $x > 1$, si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}xf(x)\right)^n}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$, che non dipende da x ed è convergente.

(ii) Si stabilisca se la convergenza di f su E è uniforme.

La convergenza è uniforme, infatti si ha per ogni $x \in E$,

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{2}xf(x)\right)^n}{2n}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n},$$

e la convergenza è uniforme per l'$M-$test di Weierstrass.

(iii) Si calcoli la somma della serie.

Posto $\displaystyle f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}y^n$, si osserva che $\displaystyle f'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y}$, per $|y| < 1$,
da cui $f(y) = -\log|1-y|$ se $|y| < 1$.
Se $x \in]0,1]$ la somma $S(x)$ della serie sarà pertanto $S(x) = -\frac{1}{2}\log|1 - \frac{x^2}{2}|$.
Se $x > 1$ $(S(x) = S(1) = \log\sqrt{2}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri, definita sull'insieme

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\},$$

la funzione $f(x, y) = 4xy - x^3 - 2y^2$.

(i) Si calcolino gradiente e matrice Hessiana di f.

$\nabla f(x, y) = \left(4y - 3x^2, 4x - 4y\right)^T$.

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si determinino eventuali punti critici di f.

I punti critici sono $(0, 0)^T$ e $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})^T$. Si noti che l'origine non è interna al dominio.

(iii) Si verifichi che, per ogni $(x, y)^T \in E$, si ha $f(x, y) \leq 2x^2 - x^3$. In particolare, $f(x, y) \leq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $x \geq 2$.

Dalla disuguaglianza $2|xy| \leq x^2 + y^2$ si ottiene subito

$$f(x, y) \leq 2x^2 + 2y^2 - x^3 - 2y^2 = 2x^2 - x^3.$$

Si ha inoltre $f(x, y) \leq x^2(2 - x) \leq 0$ per ogni $x \geq 2$.

(iv) Si verifichi che, per ogni $x \in [0, 2]$ e per ogni $y \in \mathbb{R}$ tale che $|y| \geq 4$ si ha $f(x, y) \leq 0$.

Se $y \leq 0$ la disuguaglianza è immediata. Se $y \geq 0$ si ha, per $0 \leq x \leq 2$,

$$4xy - x^3 - 2y^2 \leq 8y - 2y^2 = 2y(4 - y)$$

e quindi, se $y \geq 4$, si conclude $f(x, y) \leq 0$.

(v) Si determinino $\inf f$ e $\sup f$, calcolando eventuali valori minimo o massimo assoluti di f su E.

Evidentemente $\inf f = -\infty$ come si deduce ad esempio considerando la restrizione di f all'asse y. Inoltre, dalle osservazioni fatte in (iii) e (iv) si vede che $f(x, y) \leq 0$ se $(x, y) \in E \setminus [0, 2] \times [-4, 4]$. Nel rettangolo compatto $R = [0, 2] \times [-4, 4]$ la funzione è continua e quindi ammette massimo, per il teorema di Weierstrass. Si osservi che sulla frontiera di R la funzione assume valori non positivi. Se la funzione assume almeno un valore positivo nel rettangolo R, è chiaro che il valore massimo di f in R sarà assunto all'interno del rettangolo; inoltre, tale valore sarà anche massimo assoluto per f su tutto E. L'unico punto critico nell'interno del rettangolo è il punto $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})^T$, dove la funzione assume il valore $\frac{32}{27}$. Tale valore sarà pertanto il massimo assoluto di f.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il campo vettoriale $g(x,y) = \big(xy + 2x + y, y^2 + x + 2y\big)^T$ e il sistema di equazioni differenziali $(x', y')^T = g(x,y)$, cioè

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = xy + 2x + y \\ y' = y^2 + x + 2y \end{cases}$$

(i) Si determinino gli equilibri del sistema:

RIsolvendo il sistema algebrico ottenuto imponendo le condizioni $x' = 0$ e $y' = 0$ si ottengono tre equilibri: $(0,0)^T$, $(-3,-3)^T$, $(1,-1)^T$.

(ii) Si calcoli l'approssimante lineare della funzione g nei punti di equilibrio.
La Jacobiana di g è

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} -y+2 & x+1 \\ 1 & 2y+2 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi nel punto $(0,0)^T$ $\tilde{g}(x,y) = (2x + y, x + 2y)^T$,
nel punto $(-3,-3)^T$ $\tilde{g}(x,y) = (-x - 2y - 9, x - 4y - 9)^T$,
nel punto $(1,-1)^T$ $\tilde{g}(x,y) = (x + 2y + 1, x - y)^T$.

(iii) Si scriva la linearizzazione in $(0,0)^T$ del sistema (1).

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

(iv) Si risolva il sistema lineare descritto in (iii).

Derivando la prima equazione e ricavando y' dalla seconda si ottiene l'equazione del secondo ordine

$$x'' = 2x' + x + 2y;$$

ottenendo y dalla relazione $y = x' - 2x$ si ottiene l'equazione del secondo ordine

$$x'' - 4x' + 3x = 0$$

le cui soluzioni sono $\lambda e^t + \mu e^{3t}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Dalla relazione $y = x' - 2x$ si ottiene poi $y = -\lambda e^t + \mu e^{3t}$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la curva semplice chiusa $\gamma : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \big(t+\pi, -1-\cos(t+\pi)\big)^T & \text{se } t \in [-2\pi, 0[, \\ \big(\pi - t, 1+\cos(\pi - t)\big)^T & \text{se } t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

(i) Si disegni il sostegno Γ di γ.

La curva per $t \in [-2\pi, 0]$ è il grafico sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ della funzione $\varphi(t) = -1 - \cos(t)$. La curva per $t \in [0, 2\pi]$ è il grafico sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ della funzione $\psi(t) = 1+\cos(t)$. Pertanto Γ è il bordo del dominio normale

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \pi, |y| \le 1 + \cos x\}$$

che si può agevolmente disegnare.

(ii) Si calcoli $\int_\gamma \langle g, \tau\rangle \, ds$, dove

$$g(x, y) = \big(x^2 - \frac{1}{2}xy^2, 2x - \frac{1}{2}y^2\big)^T.$$

Applicheremo la formula di Gauss Green. Si ha

$$\int_\gamma \langle g, \tau\rangle \, ds = \iint_D \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial y} \, dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-1-\cos x}^{1+\cos x} \big(2 + xy\big) \, dy \Big) \, dx = 8\pi$$