Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro $y_0 \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$(CP) \quad \begin{cases} y' = (y^2 - 1)x \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(i) Si calcoli la soluzione del problema (CP) se $y_0 = -1$.

(ii) Si calcoli la soluzione del problema (CP) se $y_0 = 0$.

(iii) Si verifichi che per ogni y_0, tale che $|y_0| \leq 1$, la soluzione y del corrispondente problema (CP) soddisfa $|y(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 2.

Si consideri la successione $(f_n)_n$ di funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ così definite

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n^2 \leq x \\ \frac{1}{n^2 - x} & \text{se } n^2 > x. \end{cases}$$

(i) Si stabilisca se vale la formula di inversione dell'ordine dei limiti
$\lim_{x \to +\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right)$.

(ii) Si stabilisca se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su $[0, +\infty[$.

(iii) Si stabilisca se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

(iv) Sia $a > 1$; si calcoli $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 1}\, dt$.

(v) Usando il risultato in (iv) si verifichi che $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log 2 < \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(1) < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log 3$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Al variare di $z \in]0,1[$ si consideri il disco di raggio $\sqrt{1-z^2}$

$$E_z = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 - z^2\}.$$

Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(z) = \iint_{E_z} \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdy.$$

(i) Si descriva l'insieme $E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in]0,1[, (x,y)^T \in E_z\}$.

(ii) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f(z)\, dz$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri l'equazione

$$(E) \qquad e^{x-y} + x^2 - y^2 + x = 0.$$

(i) Si provi che l'equazione (E) rappresenta localmente in ogni punto una curva parametrizzabile regolare.

(ii) Si verifichi che esistono un intorno I di $x = -1$, un intorno J di $y = -1$, e una funzione $\varphi : I \to J$ il cui grafico coincide con l'intersezione di $I \times J$ con la curva rappresentata implicitamente dall'equazione (E).

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $x = -1$ è un punto di minimo o massimo locale per la funzione φ introdotta in (ii).