**Esame di Analisi matematica II - corsi a 9 e a 6 crediti**
**Prova di esercizi**
**Corso del Dr. Franco Obersnel**
**Sessione invernale, II appello**

**COGNOME e NOME** ____________________ **N. Matricola** __________

**Anno di Corso** ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(4^n x)}{2^n}.$$

$(i)$ Si determini l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} : \text{ la serie è convergente in } x\}$.

$(ii)$ Detta $f(x)$ la somma della serie si provi che, per ogni $x \in E, |f(x)| \leq 2$.

$(iii)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se la $f$ è continua.

$(iv)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se la serie può essere integrata a termine a termine.

$(v)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se la serie può essere derivata a termine a termine.

$(vi)$ Si calcoli $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx$.

**ESERCIZIO N. 2.** Si considerino le funzioni

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2, \qquad g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2.$$

($i$) Si determinino $\min_E f$ e $\max_E f$, dove $E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) \leq 1\}$.

($ii$) Si determinino i punti della frontiera di $E$ in cui il piano tangente è parallelo alle superfici di livello (non vuote) di $f$.

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** ____________

**ESERCIZIO N. 3.**

($i$) Si verifichi che le funzioni $u(x) = \cos(e^{2x})$ e $v(x) = \operatorname{sen}(e^{2x})$ sono soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea

$$u'' - 2u' + 4e^{4x}u = 0.$$

($ii$) Si calcoli il determinante Wronskiano di $u$ e $v$.

($iii$) Si trovi una soluzione particolare dell'equazione differenziale ordinaria lineare completa

$$u'' - 2u' + 4e^{4x}u = e^{6x}.$$

($iv$) Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 2u' + 4e^{4x}u = e^{6x}, \\ u(0) = \operatorname{sen}(1) + \frac{1}{4}, \\ u'(0) = 2\cos(1) + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**ESERCIZIO N. 4.** (Corso a 9 crediti.) Si consideri il campo

$$g(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)^T.$$

($i$) Si calcoli il flusso del campo $g$ attraverso il disco di centro $(0,0,2)^T$, e raggio 1, disposto perpendicolarmente all'asse $z$, orientato nel verso delle $z$ crescenti.

($ii$) Si calcoli div$g$.

($iii$) Si calcoli il flusso di $g$ attraverso il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2+1$, con $x^2+y^2 \leq 1$, orientato in modo che la normale nell'origine sia rivolta verso il basso.

**ESERCIZIO N. 4.** (Corso a 6 crediti.) Si consideri l'insieme

$$D = \Big\{(x,z)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, x(1-x) \leq z \leq x(1-x)(1+x)\Big\}.$$

($i$) Si calcoli l'area di $D$.

($ii$) Si calcoli il baricentro di $D$.

($iii$) Si calcoli il volume del solido

$$E = \Big\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\Big(1-\sqrt{x^2+y^2}\Big) \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\Big(1-(x^2+y^2)\Big)\Big\}.$$