Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ____________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{5^n}\right).$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

(ii) Si stabilisca se la convergenza della serie su E è uniforme.

(iii) Si calcoli $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

ESERCIZIO N. 2.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 + 1}$.

(i) Si calcoli il gradiente di f.

(ii) Si determinino i punti critici di f.

(iii) Si calcolino il minimo e il massimo della funzione f ristretta alla circonferenza C_r, al variare di $r \in \mathbb{R}$: $C_r = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = r^2\}$.

(iv) Si calcoli $\displaystyle\lim_{\|(x,y)^T\| \to +\infty} f(x, y) =$

(v) Si determinino:

- $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f =$

- $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f =$

COGNOME e NOME ____________________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3.

Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy:

$$(CP_{ab}) \begin{cases} u' = au + bx \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si calcoli la soluzione $u_{a,b}$ di (CP_{ab}):

(ii) Si determinino i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali il punto $x = 0$ è un punto di minimo per $u_{a,b}$.

(iii) Si determinino i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali si ha $u_{a,b}(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 4. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si consideri il campo vettoriale (radiale) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = f(\|(x, y)^T\|)\,(x, y)^T.$$

(*i*) Si calcolino la matrice Jacobiana, il rotore e la divergenza di g.

(*ii*) Si provi che g è un campo conservativo.

(*iii*) Si verifichi che il campo $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da

$$U(x, y) = \int_1^{\|(x,y)^T\|} t\, f(t)\, dt$$

è un potenziale per g.

(*iv*) Nel caso $f(t) = t^2$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (s^2 - 1, s(s^2 - 1))^T$, si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds.$$