Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \big(\alpha x + 1\big)^n$.

(i) Si calcoli il raggio di convergenza della serie.

(ii) Si determini l'insieme dei parametri α per i quali esiste almeno un valore reale positivo nell'insieme di convergenza.

(iii) Si determini l'insieme dei parametri α per i quali esistono almeno un valore reale positivo e almeno un valore reale negativo nell'insieme di convergenza.

(iv) Si ponga $\alpha = \frac{1}{3}$. Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione definita dalla serie è derivabile sull'intervallo $[-3, -2]$ e, in caso di risposta affermativa, si calcoli tale derivata.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 e^y - xy + z$.

(i) Si calcoli il gradiente di f.

(ii) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la superficie $S_\alpha = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = \alpha\}$.

- Si verifichi che, per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $(1, 0, \alpha - 1)^T \in S_\alpha$.

- Si scriva l'equazione del piano tangente la superficie S_α nel punto $(1, 0, \alpha - 1)^T$.

- Si scriva l'equazione parametrica della retta r_α perpendicolare alla superficie S_α nel punto $(1, 0, \alpha - 1)^T$.

(iii) Si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che la retta r_α (definita in (ii)) passi per l'origine $(0, 0, 0)^T$.

(iv) Per il valore di α determinato in (iii) si trovi la seconda intersezione della retta r_α con la superficie S_α.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Al variare della condizione iniziale $y(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$(CP_\alpha) \quad \begin{cases} y' + (x-1)y = e^x(1+x^2), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Si verifichi che la funzione $y(x) = xe^x$ è soluzione del problema (CP_α) per $\alpha = 0$.

(ii) Per ogni generico α si scriva il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine 2 della soluzione y_α del problema (CP_α).

(iii) Si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che il punto $x = 0$ sia un punto di minimo per la soluzione di (CP_α).

(iv) Per ogni generico α si determini la soluzione del problema (CP_α).

ESERCIZIO N. 4. Si considerino il campo vettoriale $g(x,y,z) = \big(x\cos z, 2z\cos y, z^2 \operatorname{sen} y\big)^T$ e la superficie di rotazione S ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva del piano xz di equazione $x = \cos z$, definita per $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(i) Si calcolino rotore e divergenza di g.

(ii) Si stabilisca se il campo g è conservativo.

(iii) Si calcoli il volume del solido racchiuso dalla superficie S.

(iv) Si calcoli il flusso del campo g uscente dalla superficie S.