Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Scipio Cuccagna ◯ Prof. Franco Obersnel ◯

Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri, per $x \neq -\frac{1}{2}$, la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{-1}{(2x+1)^2} \right)^n .$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

(ii) Si stabilisca se la convergenza su E della serie è uniforme.

(iii) Si calcoli la somma della serie.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = \Big(e^{x-1}\cos(y + \pi) + \cos(x + \pi), -e^{x-1}\mathrm{sen}\,(y + \pi)\Big)^T.$$

(i) Si calcolino rotore e divergenza di g.

(ii) Si verifichi che g è conservativo.

(iii) Si determini il potenziale U di g tale che $U(1, 0) = 0$.

(iv) Posto $h(x, y) = g(x, y) + (-y, x)^T$, si calcoli l'integrale di linea $\displaystyle\int_\gamma \langle h, \tau\rangle\, ds$, dove $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ è il semicerchio $\gamma(t) = \big(\cos(t), \mathrm{sen}\,(t)\big)^T$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si considerino le equazioni differenziali

$$(1) \quad u' = (\pi - 2u)\, x \qquad\qquad (2) \quad y' = (\pi \mathrm{sen}\,(y) - 2y)\, x.$$

(i) Si calcoli la generica soluzione di (1) e si verifichi che tutte le soluzioni di (1) hanno lo stesso limite $\ell \in \mathbb{R}$, per $x \to +\infty$. Si determini il numero ℓ.

(ii) Si provi che tutte le soluzioni di (2) sono globali (cioè hanno come massimo insieme di definizione tutto $\mathbb{R}$).

(iii) Si determinino le soluzioni costanti di (2).

(iv) Si indichi con $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione di (2) che verifica la condizione iniziale $\varphi(0) = 2$, e con $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione di (1) che verifica la condizione iniziale $\psi(0) = 2$.
Si provi che $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ell$, dove ℓ è il numero trovato in (i).

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (x^3 - x)\, e^{-y^2}$$

(i) Si determinino

• il gradiente di f:

• la matrice Hessiana di f:

• i punti critici di f:

• la natura dei punti critici di f:

• $\sup f$:

• $\sup\{f(x,y) : x \leq 0\}$:

(ii) Si provi che la funzione f, ristretta a qualsiasi retta di equazione $y = mx$, con $m \neq 0$, è limitata.

(iii) Siprovi che l'insieme di livello $\frac{1}{9}$ della funzione f: $L_\alpha = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \frac{1}{9}\}$ non è connesso (per archi).

ESERCIZIO alternativo per corso a 6 crediti. Si calcoli il volume del solido

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq 1 - x^2 + y^2;\ |y| \leq 1\}.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO