Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Al variare dei parametri reali non nulli a e b si consideri il solido

$$K_{a,b} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z \leq 1\}.$$

(i) Si calcoli il volume di $K_{a,b}$.

(ii) Si calcoli l'area della frontiera del solido $K_{1,1}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione
$$f(x,y,z) = xy^2 - x + xz - yz.$$

(*i*) Si determinino
- il gradiente di f:

- la matrice Hessiana di f:

- eventuali punti critici di f:

- la natura dei punti critici di f:

(*ii*) Si calcolino il minimo e il massimo di f ristretta alla superficie
$$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 0, -1 \le y \le 0, z = -x\}.$$

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(t \cos t, t \operatorname{sen} t\big)^T$.

(i) Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$.

(ii) Sia $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T$ la curva il cui sostegno giace sulla superficie

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\pi^2,\ z \geq 0\}$$

e la cui proiezione sul piano x, y è la curva γ (cioè tale che $\big(x(t), y(t)\big)^T = \gamma(t)$).

- Si scriva l'equazione parametrica di φ.

- Si trovino i punti del sostegno di φ nei quali il vettore tangente di φ è parallelo al piano x, y.

- Si scrivano le equazioni delle rette tangenti il sostegno di φ nei punti $(-\pi, 0, \sqrt{3\pi^2})^T$ e $(2\pi, 0, 0)^T$.

ESERCIZIO N. 4.

(i) Si scrivano gli sviluppi in serie di Taylor-Maclaurin (cioè di centro $x_0 = 0$) delle funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

(ii) Si consideri la serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{4n}.$$

- Si determini il raggio di convergenza della serie.

- Si calcolino $y'(x)$ e $y''(x)$.

- Si determini la somma $y(x)$ della serie.

(iii) Si determini una costante $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $y(x)$ considerata in (ii) sia soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$xy'' - y' + kx^3 y = 0.$$