Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_n$, con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{n+ix}{x^2+nix+n^2}.$$

(i) Si determini l'insieme E di convergenza puntuale della successione

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{esiste finito } \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}.$$

Si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti

$$|f_n(x)| = \sqrt{\frac{n^2+x^2}{(x^2+n^2)^2+n^2x^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}}{n\sqrt{(1+\frac{x^2}{n^2})^2+\frac{x^2}{n^2}}} < \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}} < \frac{1}{n},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto $E = \mathbb{R}$.

(ii) Si stabilisca se la successione è uniformemente convergente su E.

Sì perché la stima trovata in (i)

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n}$$

non dipende da x.

(iii) Si determini l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Si vede facilmente che la serie non converge assolutamente in alcun x perché il modulo del termine generale è un infinitesimo di ordine 1. Per verificare che non c'è neppure convergenza semplice si può separare la parte reale da quella immaginaria; si ottiene

$$f_n(x) = \frac{nx^2+n^3+nx^2}{(x^2+n^2)^2+x^2n^2} + i\frac{x^3}{(x^2+n^2)^2+x^2n^2}.$$

La parte reale

$$\Re e f_n(x) = \frac{2\frac{x^2}{n^2}+1}{n\big((1+\frac{x^2}{n^2})^2+\frac{x^2}{n^2}\big)}$$

è infinitesima di ordine 1, pertanto l'insieme cercato è vuoto.

ESERCIZIO N. 2.

Si consideri la funzione

$$f(x) = y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

(i) Si determini il dominio della funzione f.

Il dominio è il disco unitario chiuso:

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(ii) Si calcoli il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = \Big(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1 - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\Big)^T$$

(iii) Si determinino i punti critici di f:

Si ottiene subito $x = 0$, inoltre $y = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ da cui $y = 2^{-1/2}$. Cè un solo punto critico in

$$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

(iv) Si determinino gli estremi assoluti di f:

Studiamo la funzione sul bordo del dominio; dove $x^2 + y^2 = 1$ la funzione è $f(x, y) = y$, e quindi ha minimo -1 in $(0, -1)^T$ e massimo 1 in $(0, 1)^T$.
Si poteva anche parametrizzare il vincolo: $x = \cos\vartheta$, $y = \operatorname{sen}\vartheta$, pertanto la funzione diventa $f(\vartheta) = \operatorname{sen}\vartheta$, per $\vartheta \in [0, 2\pi]$, che ha minimo -1 e massimo 1.
Poiché $f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ si conclude che

$$\min f = -1, \qquad \max f = \sqrt{2}.$$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il campo vettoriale

$$g(x,y) = \big(x - 2y + 1, y - 2x - 1\big)^T.$$

(i) Si stabilisca se g è conservativo e, in caso positivo, si determini un potenziale U di g.

Il campo è conservativo perché è irrotazionale su un insieme stellato. Si calcola facilmente un potenziale U integrando:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - 2y + 1 \longrightarrow U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy + x + h(y);$$

$$y - 2x - 1 = \frac{\partial U}{\partial y} = -2x + h'(y) \longrightarrow U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy + x + \frac{1}{2}y^2 - y.$$

(ii) Si calcoli l'integrale $\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds$ con $\gamma(t) = \frac{t}{2\pi}\big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big)^T$, $t \in [0, 2\pi]$.

Si ha

$$\int_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds = U(1,0) - U(0,0) = \frac{3}{2}.$$

(iii) Si determini una curva $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)^T$ tale che $\gamma'(t) = g\big(\gamma(t)\big)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\gamma(0) = (1,0)^T$.

Si tratta di risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = -2x + y - 1 \\ \big(x(0), y(0)\big)^T = (1,0)^T. \end{cases}$$

Si ha, derivando la prima equazione e tenendo conto che $2y = x - x' + 1$,

$$x'' = x' - 2y' = x - 2y + 1 - 2(y - 2x - 1) = 5x - 2(x - x' + 1) + 3 = 2x' + 3x + 1,$$

pertanto le soluzioni dell'equazioni sono

$$x(t) = ae^{-t} + be^{3t} - \frac{1}{3}$$

e

$$y(t) = ae^{-t} - be^{3t} + \frac{1}{3},$$

al variare dei parametri reali a, b. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{5}{6}$, dunque la soluzione è

$$\gamma(t) = \big(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{3t} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{6}e^{3t} + \frac{1}{3}\big)^T.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri l'insieme

$$D = \Big\{(x,z)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x(1-x) \leq z \leq x(1-x^2)\Big\}.$$

(i) Si calcoli l'area di D.

Si ha

$$\int_0^1 \big(x - x^3\big) - \big(x - x^2\big)\, dx = \frac{1}{12}.$$

(ii) Si calcoli il baricentro di D.

$$\hat{x} = 12 \cdot \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = \frac{3}{5};$$

$$\hat{z} = 12 \cdot \int_0^1 \Big(\int_{x-x^2}^{x-x^3} z\, dz\Big)\, dx = 6 \int_0^1 (x^6 - 3x^4 + 2x^3)\, dx = \frac{9}{35}.$$

Il baricentro è pertanto $\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{35}\right)^T$.

(iii) Si calcoli il volume del solido

$$E = \Big\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\Big(1 - \sqrt{x^2+y^2}\Big) \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\Big(1 - (x^2+y^2)\Big)\Big\}.$$

Il solido E è ottenuto per rotazione dell'insieme D intorno all'asse z; per il teorema di Pappo-Guldino si ha

$$V = 2\pi \frac{3}{5}\frac{1}{12} = \frac{\pi}{10}.$$