Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ____________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(t) = \dfrac{1}{1+(t-n)^4}$.

- Si calcoli il limite puntuale della successione di funzioni $(f_n)_n$.

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$

- Se $b > 0$ si stabilisca se la convergenza della successione è uniforme sull'intervallo $[0, b[$.

Sì, infatti $\forall t \in [0,b[$ e $\forall n \geq b$ si ha $\dfrac{1}{1+(n-t)^4} \leq \dfrac{1}{1+(n-b)^4}$

- Si stabilisca se la convergenza della successione è uniforme sull'intervallo $[0, +\infty[$.

No, fissato $\hat{n}$ e preso $t = \hat{n}$ si ha $f_{\hat{n}}(t) = 1$

(ii) Si consideri la funzione $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$, con f_n definita in (i).
Si stabilisca, gisutificando la risposta, se è vero oppure no che

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty} g_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to+\infty} g_n(x)\Big).$$

No; $\lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to+\infty} g_n(x)\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\, dy > 0$.

Poiché la convergenza di f_n su $[0,x]$ è uniforme si ha

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt = 0$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la superficie parametrizzata $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(s,t) = \left(s + t^2, s^2 - t, 1 + s\right)^T$$

sul disco $D = \{(s,t)^T \in \mathbb{R}^2 : s^2 + 2s + t^2 \leq 3\}$.

(*i*) Si determini nel generico punto $(x_0, y_0, z_0)^T = \sigma(s_0, t_0)$ il vettore normale di σ.

$$\nu(s_0, t_0) = (1, 2t_0, -1 - 4s_0 t_0)^T$$

(*ii*) Si scriva l'equazione del piano tangente la superficie nel punto $(0,0,0)^T$.

$\sigma(-1,1) = (0,0,0)^T \qquad \nu(-1,1) = (1,2,3)^T$

$x + 2y + 3z = 0$

(*iii*) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ il sostegno della superficie σ e si consideri il campo scalare $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ definito da $f(x,y,z) = x + y + z$. Si determinino gli estremi assoluti della funzione f su Σ.

$h(s,t) = (f \circ \sigma)(s,t) = s^2 + 2s + t^2 - t + 1 \qquad h : D \to \mathbb{R}$

$\nabla h(s,t) = (2s+2, 2t-1)^T$ punto critico $(-1,1)^T$

appartiene all'interno di D; $h(-1,1) = 0$

Sulla frontiera di D $s^2 + 2s + t^2 = 3$, $h(s,t) = 4 - t$

con $-2 \leq t \leq 2$. $h(-1,-2) = 6 \quad h(-1,2) = 2$

Quindi $\max_{\Sigma} f = 6 \qquad \min_{\Sigma} f = 0$

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x' = x - y + 1; \\ y' = -x + y - 1. \end{cases}$$

(*i*) Si determinino gli equilibri del sistema (cioè le soluzioni costanti).

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

tutti i punti della retta $y = x + 1$

(*ii*) Si determini l'insieme di tutte le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} x(t) = \lambda + \mu e^{2t} \\ y(t) = \lambda + 1 - \mu e^{2t} \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(*iii*) Si determini la soluzione del problema che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

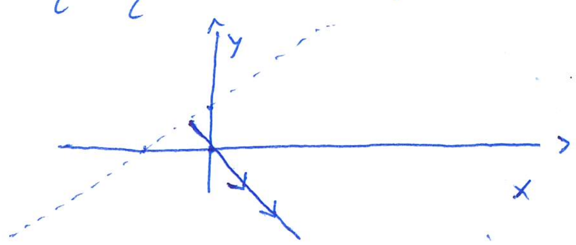
$$\lambda = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1) \qquad x(t) = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1) + \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + 1) e^{2t}$$

$$\mu = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + 1) \qquad y(t) = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1) - \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + 1) e^{2t}$$

(*iv*) Si disegni sul piano xy la traiettoria (cioè il sostegno della curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$) della soluzione del problema determinata in (*iii*) per $x_0 = 0, y_0 = 0$.

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t} \qquad y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y = -x$$

$$\lim_{t \to -\infty} \gamma(t) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$$



ESERCIZIO N. 4. Si consideri il disco del piano

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}.$$

(i) Si calcoli il volume del solido

$$\{(x, y, x)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^T \in D,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \rho^2 d\rho \right) d\vartheta = \frac{32}{9}$$

(ii) Si calcoli l'area della superficie individuata dal grafico della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ per $(x, y) \in D$.

$$\text{Area} = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}\, dx dy = \pi \sqrt{2}$$