

Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^k}$$

(i) Per ogni n e k si calcoli il massimo su \mathbb{R} della funzione $\frac{2x}{x^2+n^k}$

(ii) Si stabilisca per quali k la serie converge puntualmente su \mathbb{R} .

(iii) Si stabilisca per quali k la serie converge uniformemente su \mathbb{R} .

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il campo scalare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$f(x, y) = x^3 - x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y.$$

(i) Si calcolino gradiente e matrice Hessiana di f .

(ii) Si determinino eventuali punti critici di f e si studi il carattere di tali punti.

(iii) Si consideri la curva di livello $L_0 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. Si provi che L_0 è il sostegno di una curva localmente parametrizzabile come grafico di una funzione. Si stabilisca se esistono e quanti sono (senza necessariamente calcolarli) eventuali punti in cui L_0 non è localmente grafico di una funzione del tipo $y = \varphi(x)$ ed eventuali punti dove L_0 non è localmente grafico di una funzione del tipo $x = \psi(y)$.

(iv) Si provi che l’insieme $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, f(x, y) \leq 0\}$ è compatto e si calcolino il massimo e il minimo di f su E .

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la curva piana chiusa definita parametricamente da $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $\gamma(t) = (\sin(t) \cos(t), \sin^2(t))^T$.

(i) Si calcoli la lunghezza della curva.

(ii) Si calcoli l’area della regione racchiusa dalla curva.

ESERCIZIO N. 4. Al variare del parametro $\lambda \in \{-4, -1, 0, 1, 4\}$ si consideri l’equazione lineare

$$(E_\lambda) \quad y'' + \lambda y = 0.$$

(i) Al variare di λ si determinino tutte le soluzioni di E_λ .

(ii) Si determinino i parametri λ per i quali il problema (P_λ) ammette soluzioni non nulle che soddisfano le condizioni di periodicità

$$y(0) = y(\pi); \quad y'(0) = y'(\pi).$$