Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(t) = \dfrac{1}{n + (t-n)^4}$.

(i) Si calcoli il limite puntuale della successione di funzioni $(f_n)_n$ e si stabilisca se la convergenza della successione è uniforme su $\mathbb{R}$.

Si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n}$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Pertanto la successione di funzioni $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0.

(ii) Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$.

• Si stabilisca se la serie è puntualmente convergente su $\mathbb{R}$ ad una funzione f.

Per ogni t fissato, la successione $\frac{1}{n+(t-n)^4}$ è infinitesima di ordine 4. Pertanto la serie converge puntualmente per ogni $t \in \mathbb{R}$.

• Si stabilisca se la serie è uniformemente convergente su $[-1, 1]$.

Per ogni $t \in [-1, 1]$, si ha $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n+(n-1)^4}$. Si può quindi applicare l'M-test di Weierstrass e si conclude che la serie è uniformemente convergente sull'intervallo $[-1, 1]$ (in effetti si prova facilmente che è uniformemente convergente su tutti gli intervalli compatti).

(iii) Si verifichi che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) \leq \frac{6}{5}$.

Sia $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \frac{1}{n^4}$ se $n-1 \leq x < n$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Si ha allora

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(0) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{5}.$$

Pertanto $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

Un modo alternativo è quello di osservare che la serie si può confrontare con la serie di Mengoli:

$$f_n(0) = \frac{1}{n+n^4} \leq \frac{1}{n(1+n)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il solido

$$S = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1,\, z \geq 1\right\}.$$

La frontiera di S è unione della superficie $\Sigma = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1,\, z > 1\right\}$ e della superficie piana ellittica $E = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq \dfrac{8}{9},\, z = 1\right\}$.

(i) Si consideri il campo scalare $f : S \to \mathbb{R}$ definito da $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2$.

• Si verifichi che f ammette minino e massimo su S.

La funzione f è continua e definita sul compatto S. Si conclude per il teorema di Weierstrass.

• Si verifichi che f non ammette massimo su Σ.

Primo modo: poniamo $g(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$; se f ammette un punto di massimo $(x_0, y_0, z_0)^T$ su Σ, per il teorema del moltiplicatore di Lagrange deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda g(x_0, y_0, z_0)$. Si vede allora che necessariamente $\lambda = 0$ e il punto che si trova è $(0, 0, 3)^T$, dove la funzione assume il valore 0 e pertanto è punto di minimo.

Secondo modo: dal vincolo si ottiene $x^2 = 1 - \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4}$. Posto $h(y, z) = 2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{9}z^2$, con $1 < z \leq 3$ e $-2 \leq y \leq 2$, si osserva che il gradiente di h non si annulla mai sul dominio, quindi eventuali punti di estremo vanno ricercati sulla frontiera, cioè se $z = 3$, $-2 \leq y \leq 2$; in questo caso si ottiene soltanto il punto di minimo $y = 0, z = 3$.

• Si calcolino $\min_E f$ e $\max_E f$.

Sull'insieme E la funzione è $h(x, y) = f(x, y, 1) = 2x^2 + y^2$. Il gradiente di h si annulla soltanto nell'origine $(0, 0)^T$ che è punto di minimo. Il punto di massimo deve pertanto trovarsi sulla frontiera di E, cioè sull'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq \frac{8}{9}$. Ricavando dal vincolo $x^2 = \frac{8}{9} - \frac{y^2}{4}$ si osserva che la funzione ristretta all'ellisse si riconduce alla funzione $h(y) = \frac{16}{9} + \frac{y^2}{2}$, definita per $|y| \leq \frac{\sqrt{32}}{3}$, e pertanto il massimo si ottiene agli estremi dell'intervallo, quando $|y| = \frac{\sqrt{32}}{3}$.
In alternativa si può usare il metodo del moltiplicatore dii Lagrange.
In ogni caso si ottiene $\max_E f = \frac{32}{9}$. Naturalmente $\min_E f = 0$.

• Si calcolino $\min_S f$ e $\max_S f$.

Evidentemente il minimo è 0 essendo $f(x, y, z) \geq 0$ su S e $f(0, 0, z) = 0$ per ogni z. Non ci sono punti di massimo all'interno di S, perché il gradiente di f non si annulla mai in tali punti. Sappiamo che non ci sono punti di massimo su Σ, pertanto il massimo su S coincide con il massimo su E.
In definitiva $\max_S f = \frac{32}{9}$, $\min_S f = 0$.

COGNOME e NOME ______________________________

Continua Esercizio 2.

(ii) Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$g(x,y,z) = (2y^2 + z^2, 2z^2 + x^2, 2x^2 + y^2)^T.$$

• Si calcolino rotore e divergenza di g:

$$rot g = (2y - 4z, 2z - 4x, 2x - 4y)^T; \qquad div g = 0$$

• Si stabilisca se il campo g è conservativo.

No, perché non è irrotazionale.

• Si calcoli l'integrale doppio $\iint_D (2x^2 + y^2)\, dxdy$ con $D = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq \frac{8}{9}\right\}$.

Usando coordinate ellittiche:

$$x = \frac{\sqrt{8}}{3}\rho \cos\vartheta, \quad x = \frac{\sqrt{32}}{3}\rho \operatorname{sen}\vartheta,$$

con $0 \leq \rho \leq 1$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \Big[\int_0^1 \Big(2\frac{8}{9}\rho^2 \cos^2\vartheta + \frac{32}{9}\rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\Big)\frac{16}{9}\rho\, d\rho\Big] d\vartheta = \frac{64}{81}\int_0^{2\pi}\Big(\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta\Big)\, d\vartheta = \frac{64}{27}\pi.$$

• Si calcoli il valore assoluto del flusso del campo g attraverso la superficie Σ.

Poiché la divergenza di g è nulla, il flusso del campo uscente dal bordo del solido S è nullo. Questo flusso è somma algebrica del flusso attraverso la superficie Σ e del flusso attraverso la superficie E, che sono quindi uguali in valore assoluto. Possiamo pertanto calcolare il flusso richiesto calcolando in alternativa il flusso attraverso E. Il versore normale di E è il versore dell'asse z e la terza componente del campo g è esattamente il campo f. Pertanto l'integrale che si ottiene è esattamente quello calcolato nel punto precedente:

$$\iint_E \langle g, n\rangle\, d\sigma = \iint_D (2x^2 + y^2)\, dxdy = \frac{64}{27}\pi.$$

ESERCIZIO N. 3. Si consideri l'equazione differenziale lineare a coefficienti continui

$$y' + e^{3x+2}y = e^{3x+2}.$$

(i) Si determinino eventuali soluzioni costanti dell'equazione.

Imponendo $y'(x) = 0$ per ogni x si ottiene immediatamente $y = 1$.

(ii) Si determini una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Una base è

$$\Big\{ \exp\big(-\frac{1}{3}\exp(3x+2)\big) \Big\}.$$

(iii) Si determini l'insieme delle soluzioni dell'equazione completa.

Conosciamo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata e la soluzione particolare $y = 1$, pertanto l'insieme delle soluzioni è

$$\Big\{ \lambda \exp\big(-\frac{1}{3}\exp(3x+2)\big) + 1 : \lambda \in \mathbb{R} \Big\}.$$

(iv) Detta y_α la soluzione dell'equazione completa che in $x = 0$ assume il valore $\alpha \in \mathbb{R}$, si calcolino

$$\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) =$$

Evidentemente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = 1$. Inoltre, $\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \lambda + 1$. Poiché, imponendo la condizione iniziale si ottiene $\lambda \exp(-\frac{1}{3}e^2) + 1 = \alpha$, si conclude $\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = 1 + (\alpha - 1)\exp(\frac{1}{3}e^2)$.