Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n-3^n}{n\,4^n}\big(2x-1\big)^n.$$

(i) Si determini il raggio di convergenza della serie.

(ii) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

(iii) Si calcoli la somma della serie con $x=0$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

(i) Si verifichi che la funzione u è soluzione del problema di Cauchy

$$(C) \qquad \begin{cases} u^{iv} - u = 0, \\ u(0) = 1,\ u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0. \end{cases}$$

(ii) Si determini lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare $u^{iv} - u = 0$.

(iii) Si usino i risultati in (i) e (ii) per rappresentare la funzione u come combinazione di funzioni elementari.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il solido S definito da

$$S = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 1+x^2+y^2, 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

Si consideri il campo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$g(x,y,z) = \left(2x+yz, x-z^2, \frac{3}{2}z^2+x-2z\right)^T.$$

(i) Si calcolino il rotore e la divergenza di g.

rot$g =$ div$g =$

(ii) Si calcoli il flusso del campo g uscente dal bordo del solido S.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy.$$

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ denotiamo con L_α l'insieme di livello α della funzione f:

$$L_\alpha = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \alpha\}.$$

(i) Si calcolino il gradiente e la matrice Hessiana di f.

(ii) Si determinino i punti critici di f e se ne studi la natura.

(iii) Si determini l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali in ogni punto di L_α la curva è localmente parametrizzabile.

(iv) Posto $\alpha = -1$ si determini l'insieme dei punti di L_α in un intorno dei quali la curva è il grafico di una funzione nella variabile x.