Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{2n}$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

$$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$$

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie converge uniformemente sull'insieme $E \cap]-\infty, 0[$.

Sì. Poiché $x < 0$ la serie è di tipo Leibniz, quindi

$$|s_{n+1}(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2}\frac{|3x|^n}{n} \leq \frac{1}{2n} \to 0.$$

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie converge uniformemente sull'insieme $E \cap]0, +\infty[$.

No. Per assurdo, la convergenza sia uniforme su $]0, \frac{1}{3}[$. Per il criterio di convergenza di Cauchy, fissato $\varepsilon > 0$ dovrebbe esistere $\hat{n}$ tale che, per ogni $n \geq \hat{n}$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{(3x)^k}{2k} < \varepsilon$ per ogni $x \in E \cap]0, +\infty[$. Prendendo il limite per $x \to \frac{1}{3}^-$ si avrebbe

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{2k} \leq \varepsilon,$$

ma questo è falso per la divergenza della serie armonica.

(iv) Si calcoli la somma della serie.

Si ha $-\log(1-y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} y^n$, e quindi la somma della serie è

$$s(x) = -\log\sqrt{1-3x}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = (x-2y)|x| + 2$$

(i) Si determinino:

• il gradiente di f:

Per $x > 0$ si ha $\nabla f(x,y) = \big(2x - 2y, -2x\big)^T$; se $x < 0$ si ha $\nabla f(x,y) = \big(-2x + 2y, 2x\big)^T$; se $x = 0$ f è differenziabile solo in $(0,0)$, dove $\nabla f(0,0) = \big(0,0\big)^T$.

• la matrice Hessiana di f:

Se $x \neq 0$

$$H(f)(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot sgn(x).$$

• il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione f nel punto $(1,1)^T$:

La funzione in un intorno del punto è un polinomio di grado 2, pertanto il polinomio di Taylor di ordine 2 coincide con la funzione: $P_2(x,y) = f(x,y) = (x-2y)x + 2$.

• il massimo e il minimo della funzione f ristretta alla regione piana chiusa contenuta nel triangolo di vertici i punti $(0,0)^T$, $(-1,1)^T$, $(1,1)^T$.

Non vi sono punti critici all'interno. Si osservi che in tutti i punti in cui $x = 0$ si ha $f(0,y) = 2$. Il bordo del triangolo è composto da tre segmenti, che si possono parametrizzare facilmente: $y = x$ per $x \in [0,1]$, $y = -x$ per $x \in [-1,0]$ e $y = 1$ per $x \in [-1,1]$. La funzione ristretta a tali segmenti è un polinomio di secondo grado che si studia facilmente. Il minimo è $-1 = f(-1,1)$. Il massimo è 2.

(ii) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la linea di livello $L_\alpha = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \alpha\}$. Si determinino i parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che L_α è il grafico di una funzione.

Se $(x,y)^T \in L_\alpha$ si ha $x|x| - 2y|x| = \alpha - 2$. Se $\alpha \neq 2$ nessun punto con coordinata $x = 0$ può appartenere a L_α, quindi posso dividere per $|x|$ e ottengo

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{2-\alpha}{2|x|}.$$

Se $\alpha = 2$ invece si ha $L_\alpha = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| \cdot (x-2y) = 0\}$. Tale insieme è unione di due rette e quindi non è un grafico.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Sia $r > 0$. Si calcoli l'integrale

$$\iiint_E \left(xyz + \frac{y}{z}\right) dxdydz$$

dove E è la parte di cilindro definita da

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2,\ y \geq \frac{r}{2},\ 1 \leq z \leq 2\}.$$

RISULTATO

$$r^3 \frac{\sqrt{3}}{4} \log 2$$

SVOLGIMENTO

Integriamo per sezioni rispetto all'asse z e poi per corde rispetto all'asse y. Si ha

$$E = \Big\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 2,\ x \in [-r\frac{\sqrt{3}}{2}, r\frac{\sqrt{3}}{2}],\ \frac{r}{2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\ \Big\}.$$

Pertanto

$$\int_1^2 \Big(\int_{-r\frac{\sqrt{3}}{2}}^{r\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\int_{\frac{r}{2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (xyz + \frac{y}{z})\, dy\Big)\, dx\Big)\, dz = \int_1^2 \Big(\int_{-r\frac{\sqrt{3}}{2}}^{r\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\frac{1}{2} xz(\frac{3}{4}r^2 - x^2) + \frac{1}{2z}(\frac{3}{4}r^2 - x^2)\Big)\, dx\Big)\, dz$$

$$= \int_1^2 \Big(\Big[\frac{3}{16} r^2 z x^2 - \frac{1}{8} z x^4 + \frac{3}{8z} r^2 x - \frac{1}{6z} x^3\Big]_{-r\frac{\sqrt{3}}{2}}^{r\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big)\, dz = r^3 \frac{\sqrt{3}}{4} \log 2.$$

Si può anche osservare che la funzione $g(x, y, z) = xyz$ è dispari rispetto alla variabile x e quindi il suo integrale sul dominio simmetrico $\{x \in [-r\frac{\sqrt{3}}{2}, r\frac{\sqrt{3}}{2}],\ \frac{r}{2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$ è nullo. Questo fatto semplifica notevolmente i calcoli perché si ha

$$\iiint_E (xyz + \frac{y}{z})\, dx\, dy\, dz = \iiint_E \frac{y}{z}\, dx\, dy\, dz = \int_1^2 \frac{1}{z}\, dz \cdot \int_{-r\frac{\sqrt{3}}{2}}^{r\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\int_{\frac{r}{2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y\, dy\Big)\, dx$$

$$= \log 2 \cdot \int_{-r\frac{\sqrt{3}}{2}}^{r\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}(\frac{3}{4}r^2 - x^2)\, dx = \log 2 \cdot \Big[\frac{3}{8} r^2 x - \frac{1}{6} x^3\Big]_{-r\frac{\sqrt{3}}{2}}^{r\frac{\sqrt{3}}{2}} = r^3 \frac{\sqrt{3}}{4} \log 2.$$

ESERCIZIO N. 4. Al variare del valore iniziale $y_1 \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy (non lineare)

$$(1) \quad \begin{cases} y' = x^{-1} + e^{-y} \\ y(1) = y_1. \end{cases}$$

(*i*) Si verifichi che per ogni $y_1 \in \mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ di (1) è definita su $[1, +\infty[$, è ivi crescente e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

La derivata di y è sempre positiva su $[1, +\infty[$, quindi la funzione è crescente dove è definita. La soluzione esiste su $[1, +\infty[$ perché la funzione $f(x, y) = x^{-1} + e^{-y} \leq 1 + e^{-y_1}$ è sottolineare su questo intervallo. Se esistesse finito il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \alpha$ avremmo la contraddizione $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{-1} + e^{-y} = e^{-\alpha}$, ma allora la derivata di y sarebbe definitivamente maggiore di una costante positiva e la funzione dovrebbe tendere a $+\infty$.

(*ii*) Si consideri $y_1 = 1$. Si ponga $u(x) = e^{y(x)}$ e si scriva un problema lineare (2) nella variabile funzionale u equivalente a (1).

$$(2) \quad \begin{cases} u' = x^{-1}u + 1 \\ u(1) = e. \end{cases}$$

(*iii*) Si risolva il problema (2).

$$u(x) = ex + x \log x$$

(*iv*) Sempre per $y_1 = 1$ si risolva il problema (1), determinando l'intervallo massimale di definizione.

$$y(x) = \log\Big(x(e + \log x)\Big)$$

per $x \in]e^{-e}, +\infty[$.