Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,x^n}{(x^2+1)^n}$.

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

$$E = \mathbb{R}$$

(ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la convergenza della serie su E è uniforme.

Si ha $2x \leq x^2+1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto

$$\left| n \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^n \right| \leq n \frac{1}{2^n}$$

Per l'M-test di Weierstrass la serie converge uniformemente.

(iii) Si calcoli la somma della serie.

Poniamo $y = \frac{x}{x^2+1}$. Poiché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,y^n = y\,\frac{d}{dy} \sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{y}{(1-y)^2},$$

la somma cercata è

$$S(x) = \frac{x\,(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2}.$$

ESERCIZIO N. 2. Al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f_a(x,y) = x^3+x^2+y^2+ax$.

(i) Si determinino:

• il gradiente e la matrice Hessiana di f_a:

$$\nabla f_a(x,y) = \left(3x^2+2x+a, 2y\right)^T$$

$$H(f_a)(x,y) = \begin{vmatrix} 6x+2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

• al variare di $a \in \mathbb{R}$ si determinino gli eventuali punti critici di f_a e la loro natura:

L'equazione $3x^2+2x+a=0$ non ha soluzioni se $a > \frac{1}{3}$. Sia $a < \frac{1}{3}$, allora la funzione ha i due punti critici

$$P_a = \frac{1}{3}(-1-\sqrt{1-3a}, 0)^T, \qquad Q_a = \frac{1}{3}(-1+\sqrt{1-3a}, 0)^T.$$

Sostituendo i valori nella matrice Hessiana si osserva che il punto P_a è un punto di sella, mentre il punto Q_a è un punto di minimo relativo.

Supponiamo ora $a = \frac{1}{3}$. In questo caso il punto non è né di estremo, né di sella. Infatti, il differenziale secondo nel punto $(-\frac{1}{3}, 0)^T$ è $df^2(-\frac{1}{3}, 0)(u,v) = 2v^2$; chiaramente abbiamo un punto di minimo in ogni direzione $(u,v)^T$ con $v \neq 0$. Tuttavia, la funzione ristretta alla direzione $(1,0)^T$ è strettamente crescente (con un flesso nel punto $x = -\frac{1}{3}$), e quindi non ci sono direzioni lungo le quali la funzione assume nel punto un massimo relativo.

(ii) Si consideri la funzione f_0 (con $a=0$) e l'insieme $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Si calcolino il massimo e il minimo di f_0 su E.

Nel disco E si ha $f_0(x,y) = x^3+x^2+y^2 \leq x^3+1$, pertanto, $0 \leq f(x,y) \leq 2$ per ogni punto $(x,y)^T \in E$. Poiché $f(-1,0) = 0$ e $f(1,0) = 2$ si conclude che il minimo è 0 e il massimo è 2.

COGNOME e NOME ____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$g(x,y,z) = \left(y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z, x^3 + z^3 + 3y^2x + 3y^2z, x^3 + y^3 + 3z^2x + 3z^2y\right)^T.$$

(i) Si calcolino divergenza e rotore di g.

$$div(g)(x,y,z) = 12(xy + xz + yz); \quad rot(g)(x,y,z) = (0,0,0)^T$$

(ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se il campo g è conservativo e se è solenoidale.

Il campo è conservativo perché irrotazionale su $\mathbb{R}^3$, ma non è solenoidale perché non è a divergenza nulla.

(iii) Si calcoli un potenziale U di g.

$$U(x,y,z) = x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y)$$

(iv) Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva definita da $\gamma(t) = (t^5, t^7, t^9)^T$.

$$\int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = 6$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri l'equazione differenziale $(E)\quad u' = (u^2 - u - 2)\,t$ e, per ogni $a \in \mathbb{R}$, si indichi con $\phi_a : I_a \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy (CP) associato a (E) con condizione iniziale $\phi_a(0) = a$, (I_a è l'intervallo più grande possibile dove è definita la funzione ϕ_a).

(i) Si determinino gli equilibri dell'equazione (cioè le soluzioni costanti).

$u = 2$ e $u = -1$.

(ii) Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si determini il numero dei punti critici della funzione ϕ_a.

Se $a \neq 2, -1$, l'unico punto critico è $t = 0$. Infatti, sia $\phi_a'(t_0) = 0$, con $t_0 \neq 0$. Allora $\phi_a^2(t_0) - \phi_a(t_0) - 2 = 0$, quindi $\phi_a(t_0) = -1$ oppure $\phi_a(t_0) = 2$. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy associato a (E) con condizione iniziale $\phi_a(t_0) = -1$ oppure $\phi_a(t_0) = 2$, si conclude che ϕ_a è un equilibrio.

(iii) Si stabilisca il carattere di 0 come punto critico delle soluzioni (cioè se 0 è un punto di minimo, di massimo o altro per ϕ_a) .

Si ha $\phi_a''(0) = a^2 - a - 2$. Pertanto 0 è punto di minimo se $a \leq -1$ oppure $a \geq 2$, è punto di massimo se $a \in [-1, 2]$.

(iv) Si stabilisca, motivando la risposta, se è vero che

• se $a > 0$, si ha $\phi_a(t) > 0$ per ogni $t \in I_a$:

È falso. Consideriamo ad esempio $a = 1$. Poiché la funzione ϕ_1 è decrescente a destra di $t = 0$ (almeno fino a quando si trova tra i due equilibri), si avrà $u'(t) < -2t$ per questi valori di t. Si osservi che la funzione $\psi(t) = 1 - t^2$ è soluzione del problema di Cauchy $\psi' = -2t; \psi(0) = 1$. Per il teorema del confronto, avremo $\phi_1(t) < 1 - t^2$, e quindi la funzione ϕ_1 si annulla in un punto $t_1 < 1$.

Per rispondere al quesito si poteva, in alternativa, risolvere l'equazione a variabili separate. Ad esempio, se $a = 1$ si ottiene

$$\phi_1(t) = \frac{4 - e^{3/2\,t^2}}{2 + e^{3/2\,t^2}},$$

funzione che si annulla nel punto $t_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\log 4}$.

Non è difficile provare che per ogni a tale che $0 < a < 2$ la funzione si annulla in qualche t.

• se $a < 0$, si ha $\phi_a(t) < 0$ per ogni $t \in I_a$:

È vero. Infatti, se $-1 < a < 0$ il punto $t = 0$ è punto di massimo assoluto; se $a < -1$ la soluzione non può attraversare l'equilibrio e quindi resta sempre $\phi_a(t) < -1$.

(v) Si stabilisca se è vero che ogni soluzione ϕ_a è globale (cioè $I_a = \mathbb{R}$).

Non è vero se $a > 2$. La cosa si può verificare scrivendo esplicitamente la soluzione, oppure per confronto con l'equazione $u' = \frac{1}{2}t\,u^2$ prendendo $a > 4$ (si osserva che $(u^2 - u - 2)\,t > \frac{1}{2}t\,u^2$ se $t > 0$, $u \geq 4$).