Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}.$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

(ii) Si determini l'insieme in cui la serie converge assolutamente.

(iii) Si determinino i numeri $a > 0$ tali che la serie converge uniformemente sull'insieme $[-a, a]$.

(iv) Si verifichi che la serie non converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO N. 2.

(i) Si disegni approssimativamente l'insieme $\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : |y| \le e^{-\frac{1}{2}x^2}\}$.

(ii) Si calcoli il volume generalizzato dell'insieme

$$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |y| \le z \le e^{-\frac{1}{2}x^2}\}.$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

(i) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy per il sistema lineare di due equazioni differenziali ordinarie

$$(CPL)\begin{cases} x' = x + y - 2, \\ y' = 1 - x, \\ x(0) = \frac{1}{2}, y(0) = 2. \end{cases}$$

(ii) Si determini l'equilibrio (cioè la soluzione costante) $(x_0, y_0)^T$ del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(E)\begin{cases} x' = xy - 1, \\ y' = y - xy. \end{cases}$$

(iii) Si spieghi, giustificando le affermazioni, in quale modo i sistemi in (i) e in (ii) sono legati tra loro. Come si comporta una soluzione del sistema in (ii) nelle vicinanze del punto $(x_0, y_0)^T$?

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy - x^2 + x - \frac{1}{3}y^3.$$

(i) Si determinino

- il gradiente di f:

- la matrice Hessiana di f:

- i punti critici di f:

- la natura dei punti critici di f:

(ii) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $L_\alpha = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \alpha\}$ l'insieme di livello α della funzione f. Per quali valori del parametro α la curva L_α ammette in ogni punto una parametrizzazione regolare locale come grafico di una funzione?

(iii) Nel caso $\alpha = 0$, si determinino i punti della curva L_0 per i quali L_0 non è localmente il grafico di una funzione derivabile $y = \varphi(x)$.