Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ________________________________ **N. Matricola** ____________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ________________________________

ESERCIZIO N. 1.

Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la successione di funzioni $\big(f_n\big)_{n\geq 1}$, con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}.$$

(i) Per ogni α si calcolino $\sup_{\mathbb{R}} f_n(x)$ e $\inf_{\mathbb{R}} f_n(x)$.

Osserviamo che per ogni n e α la funzione f_n è dispari e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$. Per ogni n e α si ha

$$f_n'(x) = n^\alpha \, \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

e quindi $x = \frac{1}{n}$ è punto di massimo per f_n, con valore massimo $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}n^{\alpha-2}$, $x = -\frac{1}{n}$ è punto di minimo per f_n, con valore minimo $-\frac{1}{2}n^{\alpha-2}$.

(ii) Si determini l'insieme dei parametri α per i quali la successione $\big(f_n\big)_{n\geq1}$ è infinitesima su $\mathbb{R}$ e l'insieme dei parametri α per i quali la successione $\big(f_n\big)_{n\geq1}$ è un uniformemente infinitesima su $\mathbb{R}$.

Si ha $\left|\dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}\right| \leq \dfrac{1}{|x|}n^{\alpha-2}$, perciò la successione è infinitesima puntualmente su $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha < 2$. Se $\alpha \geq 2$, invece, la successione non è infinitesima, come si verifica immediatamente considerando ad esempio $x = 1$.

Per studiare la convergenza uniforme ricordiamo che $\max |f_n(x)| = \frac{1}{2}n^{\alpha-2}$. Perciò

$$\left|\frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{2}n^{\alpha-2}$$

e la successione è uniformemente infinitesima se $\alpha < 2$.

(iii) Per $\alpha = 1$ si determini l'insieme di convergenza puntuale E della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Se $\alpha = 1$ la successione $\big(f_n(x)\big)_n$ è infinitesima di ordine 1 per $n \to +\infty$ per ogni $x \neq 0$. Pertanto la serie converge soltanto se $x = 0$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 - y^3 + y$$

(*i*) Si determinino:

• il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \left(x(3x+4), 1-3y^2\right)^T$$

• la matrice Hessiana di f:

$$H(f)(x,y) = \begin{vmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix}$$

• eventuali punti critici di f e la loro natura:

$(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ punto di minimo, $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ punto di sella, $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ punto di sella, $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ punto di massimo.

(*ii*) Sia ϕ il piano tangente il grafico della funzione f nel punto $(-1,0,1)^T$

• Si scriva l'equazione del piano ϕ.

$$z = y - x$$

• Si trovino tutti i punti del grafico di f che hanno il piano tangente parallelo al piano ϕ.

I punti devono risolvere le equazioni $z = f(x,y)$ e $\nabla f(x,y) = (-1,1)^T$, cioè $x(3x+4) = -1$, $1 - 3y^2 = 1$. Si ottiene ovviamente il punto $(-1,0,1)^T$ e inoltre si ottiene il nuovo punto $(-\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{27})^T$.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il campo vettoriale $g(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)^T$

(i) Si calcolino $rot(g)$ e $div(g)$.

$rot(g) = (0,0,0)^T$; $divg = 0$.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto dal campo g sulla circonferenza $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big)^T$.

Si ha

$$\int_0^{2\pi} \langle (\operatorname{sen} t, -\cos t)^T, (-\operatorname{sen} t, \cos t)^T \rangle \, dt = -2\pi$$

Si osservi che il campo, pur essendo irrotazionale, non è conservativo.

(iii) Si calcoli il lavoro compiuto dal campo g sulla curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(2+\cos(t), 1+2\operatorname{sen}(t)\big)^T$.

Si osservi che la curva γ è un'ellisse con sostegno nel semipiano $E_+ = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Il campo, ristretto all'insieme stellato E_+, è conservativo, e quindi il lavoro di g su γ è nullo.

(iv) Si calcoli un potenziale del campo g ristretto all'insieme $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1\}$.

$U(x,y) = \operatorname{arctg}(x/y)$.

NOTA: Questo è il classico esempio di campo irrotazionale non conservativo ed è stato studiato nel dettaglio a lezione.

ESERCIZIO N. 4. Al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$(CP_a) \quad \begin{cases} y'' + (y')^3 = 0, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = -a. \end{cases}$$

e si indichi con y_a la soluzione di (CP_a).

(i) Si verifichi che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, si ha $y_{-a} = -y_a$.

Posto $u(x) = -y_a(x)$ si ha $u'' + (u')^3 = -y_a''(x) + (-y_a'(x))^3 = 0$ e inoltre $u(0) = -a$, $u'(0) = a$. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (CP_{-a}) si conclude.

(ii) Si determini la soluzione y_a, specificandone il dominio massimale.

Per comodità supponiamo $a > 0$. Se $a < 0$ ci si riconduce al caso precedente sfruttando l'osservazione in (i). Posto $u = y'$ risolviamo l'equazione a variabili separate $u' = -u^3$ con condizione iniziale $u(0) = -a$. Integrando da 0 a x si ottiene

$$\int_0^x -u^{-3}u'\,dt = x \qquad \Rightarrow \qquad x = \int_{-a}^{u(x)} -u^{-3}\,du = \frac{1}{2}\big(u(x)^{-2} - a^{-2}\big),$$

da cui

$$|u(x)| = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2x+1}} = \frac{a}{\sqrt{2a^2x+1}}.$$

La funzione u è negativa in un intorno di 0, quindi $u(x) = -\frac{a}{\sqrt{2a^2x+1}}$.

Integriamo tra 0 e x per ottenere y:

$$y(x) - a = \int_0^x y'(t)\,dt = \int_0^x -\frac{a}{\sqrt{2a^2t+1}}\,dt = -\frac{1}{a}\sqrt{2a^2x+1} + \frac{1}{a};$$

$$y(x) = \frac{a^2 + 1 - \sqrt{2a^2x+1}}{a},$$

definita per $x \in [-\frac{1}{2a^2}, +\infty[$.
Se $a = 0$ la soluzione è la costante nulla.

(iii) Si provi che per ogni $a \neq 0$ la funzione y_a ha esattamente uno zero reale.

Sia $a > 0$. Per quanto visto nel punto (ii) la funzione $y' = u$ è sempre negativa nel dominio (lo è in un intorno di 0, ma non può annullarsi per unicità della soluzione del problema di Cauchy, e quindi lo è nell'intero dominio). Poiché $y(0) = a > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$ si conclude. Se poi $a < 0$ si sfrutta l'osservazione in (i).