Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_n$, con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}$.

(i) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione.

La successione tende uniformemente a 0. Poiché le funzioni sono dispari, possiamo limitarci allo studio per $x \geq 0$. Calcolando la derivata di f_n, si trova il punto di massimo $x = n^{-3/2}$, da cui

$$|f_n(x)| \leq |f_n(n^{-3/2})| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

(ii) Si stabilisca se è soddisfatta l'uguaglianza $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$

No. Infatti, per ogni n si ha

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \left[\frac{1}{2n^2}\log(1+n^3x^2)\right]_0^{+\infty} = +\infty,$$

mentre

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

(iii) Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie.

La serie converge puntualmente assolutamente. Infatti, per ogni $x > 0$ si ha

$$\frac{nx}{1+n^3x^2} = \frac{1}{\frac{1}{nx}+n^2x^2} < \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$$

e si conclude per confronto con la serie armonica di esponente 2.

Se $x = 0$ la convergenza è ovvia.

Invece non c'è convergenza uniforme. Questo si vede applicando il criterio di Cauchy. Se la convergenza fosse uniforme, fissato ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{10}$, dovrebbe esistere n_ε tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$ e ogni $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{kx}{1+k^3x^2} < \varepsilon$. Prendendo $p = n$ e $x = \frac{1}{\sqrt{8n^3}}$ si ottiene la contraddizione

$$\frac{1}{10} > \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^3x^2} + \frac{(n+2)x}{1+(n+2)^3x^2} + \cdots + \frac{2nx}{1+(2n)^3x^2} \geq n\frac{nx}{1+(2n)^3x^2} = \sqrt{\frac{n}{8}}\,\frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+2y^2}$.

(i) Si verifichi che $\displaystyle\lim_{\|(x,y)^T\| \to +\infty} f(x,y) = 0$ e si deduca che esistono $\max f$ e $\min f$.

Si ha

$$\left| \frac{x}{1+x^2+2y^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

L'esistenza del massimo e del minimo si deduce dal teorema di Weierstrass applicato alla restrizione di f ad un disco compatto al di fuori del quale la funzione verifica ad esempio $|f(x,y)| \leq f(1,1)$.

(ii) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2} \Big(1 - x^2 + 2y^2, -4xy\Big)^T.$$

(iii) Si determinino eventuali punti critici di f.

Non può essere $x = 0$, perché si otterrebbe $1 + 2y^2 = 0$, impossibile. Quindi necessariamente si ha $y = 0$ e $|x| = 1$. Abbiamo pertanto due punti critici: $(-1,0)^T$ e $(1,0)^T$.

(iv) Si studi il carattere dei punti critici di f.

Poiché la funzione ammette necessariamente massimo e minimo e abbiamo soltanto due punti critici, questi devono essere un punto di minimo e un punto di massimo (assoluti). Si ha

$$\min f = f(-1,0) = -\frac{1}{2}; \quad \max f = f(1,0) = \frac{1}{2}.$$

(v) Si determinino il massimo e il minimo assoluti di f ristretta all'insieme $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

Nell'interno di E non ci sono punti critici, quindi i punti di minimo e massimo devono appartenere all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$. Si osservi che l'ascissa x di tutti questi punti soddisfa $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sostituendo $y^2 = x^2 - \frac{1}{2}$ nell'espressione di f si ottiene la funzione $h :]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$h(x) = \frac{1}{3x}$$

che ha massimo nel punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e minimo nel punto $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pertanto si conclude

$$\min_E f = -\frac{\sqrt{2}}{3}; \quad \max_E f = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$(E) \quad x' + x = f(t); \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0, \\ t & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

(i) Si determinino tutte le soluzioni locali dell'equazione (E) definite in $]-\infty, 0[$.

In questo caso possiamo risolvere l'equazione lineare $x' + x = 0$, le cui soluzioni, su $]-\infty, 0[$, sono le funzioni $x(t) = \lambda e^{-t}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Si determinino tutte le soluzioni locali dell'equazione (E) definite in $]0, +\infty[$.

In questo caso possiamo risolvere l'equazione lineare $x' + x = t$, le cui soluzioni, su $]0, +\infty[$, sono le funzioni $x(t) = \mu e^{-t} + t - 1$, con $\mu \in \mathbb{R}$.

(iii) Si determinino tutte le soluzioni globali dell'equazione (E), definite su $\mathbb{R}$.

Dobbiamo imporre che la soluzione λe^{-t} si raccordi con continuità in 0 alla soluzione $\mu e^{-t} + t - 1$, pertanto si deve imporre $\lambda = \mu - 1$. Pertanto le soluzioni sono le funzioni definite da

$$x(t) = \begin{cases} (\mu - 1)e^{-t} & \text{se } t < 0, \\ \mu e^{-t} + t - 1 & \text{se } t \ge 0, \end{cases}$$

per ogni $\mu \in \mathbb{R}$. Si noti che queste sono effettivamente soluzioni in quanto sono anche derivabili in $t = 0$ con $x'(0) = 1 - \mu$.

(iv) Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione di E che soddisfa $\phi(-1) = e$. Quanto vale $\phi(1)$?

Dalla relazione $\phi(-1) = e$ si ottiene $\mu = 2$. Pertanto $\phi(1) = 2\, e^{-1}$.

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli il baricentro del solido omogeneo ottenuto ruotando di 2π gradi intorno all'asse x la figura piana

$$E = \{(x,z)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad 0 \leq z \leq e^{-x}\}.$$

RISULTATO

$$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T$$

SVOLGIMENTO

Si calcola facilmente il volume integrando per sezioni rispetto all'asse x. La sezione S_x è un disco di raggio e^{-x}. Pertanto

$$V = \int_0^{+\infty} \pi e^{-2x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

L'ascissa del baricentro è pertanto

$$\hat{x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} x\pi e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}.$$