

Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + e^{-nx}).$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

(ii) Si provi che la serie converge uniformemente sull'intervallo $[1, 2]$.

(iii) Si verifichi che la serie non converge uniformemente sul suo insieme di convergenza.

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli l'integrale $\iint_E y \, dx dy$,

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x^2 - y^2 \leq 1\}.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3.

Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si indichi con φ_a la soluzione del problema di Cauchy

$$(CP_a) \begin{cases} y' = xy^2 - 2xy, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

(i) Si determinino i valori $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione φ_a è costante.

(ii) Si calcoli la soluzione φ_a per $a = 3$, si determini il suo intervallo massimale di definizione e si osservi che non è limitata.

(iii) Si determinino i valori $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione φ_a nel punto $x = 0$ ha un punto di minimo e i valori $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione φ_a nel punto $x = 0$ ha un punto di massimo.

(iv) Si verifichi che per ogni $a \leq 2$ la soluzione φ_a è limitata.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2(y - x) & \text{se } x < y \\ (y - x)^2((y - x)^2 - 1) + 4xy & \text{se } x \geq y. \end{cases}$$

(i) Si stabilisca, giustificando la risposta, se f è continua su \mathbb{R}^2 .

(ii) Si calcolino

- il gradiente di f :

- la matrice Hessiana di f :

- i punti critici di f (un punto critico è un punto in cui f è differenziabile e in cui ∇f si annulla):

- la natura dei punti critici di f :

(iii) Si verifichi che $(0, 0)^T$ è un punto di sella.