

## Esame di Analisi matematica II - corsi a 6 e a 9 crediti

Prova di esercizi

Corso del Dr. Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME \_\_\_\_\_ N. Matricola \_\_\_\_\_

Anno di Corso \_\_\_\_\_ Laurea in Ingegneria \_\_\_\_\_

**ESERCIZIO N. 1.**

(i) Si provi che la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$  converge uniformemente su  $\mathbb{R}$  ad una funzione continua  $f$ .

(ii) Si provi che la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt$  converge puntualmente ad una funzione continua.

(iii) Si verifichi che la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{n^2 + t^2} dt$  non converge uniformemente su  $\mathbb{R}$ .

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}.$$

(i) Si verifichi che  $f(x, y) \leq \frac{1}{2}$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ .

(ii) Si determinino

- il gradiente di  $f$ :

- i punti critici di  $f$ :

- la natura dei punti critici di  $f$ :

- gli estremi assoluti di  $f$ :

COGNOME e NOME \_\_\_\_\_ N. Matricola \_\_\_\_\_

**ESERCIZIO N. 3.** Si considerino il problema lineare

$$(PCL) \quad \begin{cases} u' = \operatorname{sen}(t) (\log 2 + u - 1) \\ u(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

e il problema non lineare

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = \operatorname{sen}(t) \log(u^2 + 1) \\ u(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

(i) Si trovi la soluzione  $v$  del problema lineare (PCL).

(ii) Detta  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la soluzione del problema non lineare (PC), si provi che  $w$  differisce da  $v$  per un infinitesimo di ordine  $> 2$  per  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  (cioè i polinomi di Taylor di  $v$  e  $w$  con punto base  $\frac{\pi}{2}$  coincidono fino al secondo ordine).

**ESERCIZIO N. 4.** (esercizio per il corso a 9 crediti) Si calcoli il flusso  $\iint_{\partial T} \langle g, n \rangle d\sigma$  del campo vettoriale

$$g(x, y, z) = (x - 2 \operatorname{sen} y \cos x, 2 \operatorname{sen} x \cos y + y, z^2 + \operatorname{sen} x \cos y)^T$$

uscente dal bordo  $\partial T$  del toro

$$T = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [-1, 1], \quad 2 - \sqrt{1 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 + \sqrt{1 - z^2}\}.$$

**RISULTATO**

**SVOLGIMENTO**

**ESERCIZIO N. 4.** (esercizio per il corso a 6 crediti) Si calcoli l'integrale triplo  $\iiint_T (2z + 2) dx dy dz$  sul mezzo toro

$$T = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], \quad 2 - \sqrt{1 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 + \sqrt{1 - z^2}\}.$$

**RISULTATO**

**SVOLGIMENTO**