Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(t) = \dfrac{1}{1 + (t-n)^4}$.

• Si calcoli il limite puntuale della successione di funzioni $(f_n)_n$.

• Se $b > 0$ si stabilisca se la convergenza della successione è uniforme sull'intervallo $[0, b[$.

• Si stabilisca se la convergenza della successione è uniforme sull'intervallo $[0, +\infty[$.

(ii) Si consideri la funzione $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$, con f_n definita in (i).
Si stabilisca, gisutificando la risposta, se è vero oppure no che

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\lim_{n\to+\infty} g_n(x) \Big) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\lim_{x\to+\infty} g_n(x) \Big).$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la superficie parametrizzata $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(s,t) = \left(s + t^2, s^2 - t, 1 + s\right)^T$$

sul disco $D = \{(s,t)^T \in \mathbb{R}^2 : s^2 + 2s + t^2 \leq 3\}$.

(*i*) Si determini nel generico punto $(x_0, y_0, z_0)^T = \sigma(s_0, t_0)$ il vettore normale di σ.

(*ii*) Si scriva l'equazione del piano tangente la superficie nel punto $(0,0,0)^T$.

(*iii*) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ il sostegno della superficie σ e si consideri il campo scalare $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ definito da $f(x,y,z) = x + y + z$. Si determinino gli estremi assoluti della funzione f su Σ.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x' = x - y + 1; \\ y' = -x + y - 1. \end{cases}$$

(i) Si determinino gli equilibri del sistema (cioè le soluzioni costanti).

(ii) Si determini l'insieme di tutte le soluzioni del sistema.

(iii) Si determini la soluzione del problema che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

(iv) Si disegni sul piano xy la traiettoria (cioè il sostegno della curva $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)^T$) della soluzione del problema determinata in (iii) per $x_0 = 0, y_0 = 0$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il disco del piano

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}.$$

(i) Si calcoli il volume del solido

$$\left\{(x, y, x)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^T \in D,\, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

(ii) Si calcoli l'area della superficie individuata dal grafico della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ per $(x, y) \in D$.