Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_n$, definita da

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{3^n + 4^n}$$

(i) Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : \text{esiste finito il limite } \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$. Si determini l'insieme E e si stabilisca se la convergenza è uniforme su E.

Evidentemente si ha convergenza se $e^x \leq 4$. Si ha $E = \,]-\infty, \log 4]$. In particolare, se $x < \log 4$ il limite è 0, se $x = \log 4$ il limite è 1. La convergenza non è uniforme; se lo fosse la funzione limite (che vale 0 se $x < \log 4$ e 1 se $x = \log 4$) dovrebbe essere continua.

(ii) Si determini l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ e si stabilisca se la convergenza è uniforme su questo insieme.

L'insieme di convergenza della serie è $E = \,]-\infty, \log 4[$. Chiaramente la serie non converge in $x = \log 4$ perché la successione dei termini generali non è infinitesima nel punto. Se $x < \log 4$ la convergenza si verifica facilmente ad esempio per confronto con la serie geometrica di ragione $\left(\frac{e^x}{4}\right)^n$. La convergenza non può essere uniforme perché si è visto che la successione dei termini generali non è uniformemente infinitesima.

(iii) Si verifichi che $\dfrac{9}{14} < \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) < \dfrac{4}{3}$.

La prima disuguaglianza è immediata se osserviamo che la serie è a termini positivi e $f_n(0) + f_1(0) = \frac{9}{14}$. La seconda disuguaglianza si ottiene per confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ che ha come somma $\frac{4}{3}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{1+x^4+y^4}$.

(i) Si stabilisca, giustificando la risposta, se esistono il minimo e il massimo assoluti di f.

Si osservi che la funzione è dispari ed è positiva se $x > 0$, negativa se $x < 0$. La funzione ha limite 0 se $\|(x,y)^T\| \to +\infty$. Quindi, esiste un disco compatto D_r al di fuori del quale la funzione verifica $|f(x,y)| < \frac{1}{2}$. Per il teorema di Weierstrass, grazie alla compattezza di D_r e alla continuità della funzione, esistono su D_r massimo M e minimo $-M$. Si ha in particolare $-M \leq f(-1,0) = -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} = f(1,0) \leq M$, e quindi $-M$ e M sono anche minimo e massimo della funzione su tutto $\mathbb{R}^2$.

(ii) Si calcoli il gradiente di f, si determinino eventuali punti critici di f e se ne studi il carattere.

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{(1+x^4+y^4)^2}\left(1+y^4-3x^4, -4xy^3\right)^T$$

I punti critici sono $(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, 0)^T$ e $(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, 0)^T$. Poiché sappiamo, da (i), che la funzione f ha minimo e massimo, ed esistono soltanto due punti critici, questi devono essere rispettivamente un punto di minimo e un punto di massimo.

(iii) Si determini la direzione di massima pendenza di f nel punto $(0,0)^T$.

La direzione di massima pendenza è quella del gradiente della funzione nel punto, quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)^T$.

(iv) Si determini l'equazione del piano tangente il grafico di f nel punto $(1, 0, \frac{1}{2})^T$.

Si ha $f(1,0) = \frac{1}{2}$, $\nabla f(1,0) = (-\frac{1}{2}, 0)^T$, quindi l'equazione è

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1); \quad 2z + x - 2 = 0$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

(i) Si verifichi che la funzione $\phi(t) = e^{t^2}$ è soluzione dell'equazione lineare

$$(E) \quad y'' + 2y' + 2y = 4\big(t^2 + t + 1\big)\, e^{t^2}.$$

È immediato calcolando le derivate della funzione ϕ.

(ii) Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$(H) \quad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Gli zeri del polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ sono $-1 \pm i$, quindi una base dello spazio delle soluzioni è $\{e^{-t}\cos t, e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t\}$. Tutte le soluzioni dell'equazione si possono pertanto scrivere nella forma $e^{-t}\big(a\,\cos(t) + b\,\mathrm{sen}\,(t)$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 4\big(t^2 + t + 1\big)\, e^{t^2}, \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

La generica soluzione dell'equazione completa si ottiene sommando la generica soluzione del problema omogeno e una soluzione particolare, Poiché una soluzione particolare è la funzione $\phi(t)$, la soluzione che cerchiamo è del tipo $y(t) = e^{-t}\big(a\,\cos(t) + b\,\mathrm{sen}\,(t)\big) + \phi(t)$. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ si ottiene $a = -1$, imponendo la condizione iniziale $y'(0) = 0$ si ottiene $b = a$, pertanto la soluzione cercata è

$$y(t) = -e^{-t}(\cos(t) + \mathrm{sen}\,(t)) + e^{t^2}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = \big(y - z^2, 2x + z^3, z^2 - x - y\big)^T.$$

(i) Si calcolino il rotore e la divergenza di g.

$$rot\, g(x,y,z) = \big(-1 - 3z^2, -2z + 1, 1\big)^T.$$
$$div\, g(x,y,z) = 2z.$$

(ii) Si calcoli il flusso del campo g che attraversa dal basso verso l'alto il disco

$$D_3 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = 3,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e il flusso del campo g che attraversa dall'alto verso il basso il disco

$$D_0 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Parametrizziamo il disco D_3 con $\sigma : [0,2\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(\vartheta,\rho) = \big(\rho\cos(\vartheta), \rho\,\mathrm{sen}\,(\vartheta), 3\big)^T$. Si ha $\nu(\vartheta,\rho) = (0,0,\rho)^T$, e quindi il verso è quello richiesto. Calcoliamo il flusso

$$\int_{D_3} \langle g, \nu\rangle\, ds = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (9 - \rho\cos(\vartheta) - \rho\,\mathrm{sen}\,(\vartheta))\,\rho\, d\rho \right) d\vartheta = 36\pi.$$

Parametrizziamo il disco D_0 con $\sigma : [0,2\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(\vartheta,\rho) = \big(\rho\cos(\vartheta), \rho\,\mathrm{sen}\,(\vartheta), 0\big)^T$. Si ha di nuovo $\nu(\vartheta,\rho) = (0,0,\rho)^T$, e quindi il verso è opposto a quello richiesto, dovremmo tenerne conto nel calcolo del flusso. Calcoliamo il flusso

$$\int_{D_0} \langle g, \nu\rangle\, ds = -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (-\rho\cos(\vartheta) - \rho\,\mathrm{sen}\,(\vartheta))\,\rho\, d\rho \right) d\vartheta = 0.$$

(iii) Si calcoli il flusso del campo g che attraversa dall'interno all'esterno la superficie cilindrica

$$C = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,3],\ x^2 + y^2 = 4\}.$$

Usiamo il teorema della divergenza per calcolare il flusso uscente dal bordo del cilindro pieno CP; integrando per sezioni, detto $D_z = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 4\}$, si ha

$$\int_{CP} \langle g, \nu\rangle\, ds = \iiint_{CP} div g(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^3 \left(\iint_{D_z} 2z\, dxdy \right) dz = 4\pi \cdot 9$$

Per ottenere il flusso che attraversa la superficie laterale è sufficiente sottrarre i contributi sui dischi D_0 e D_3. Si ottiene pertanto $\displaystyle\int_C \langle g, \nu\rangle\, ds = 0$.