Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(-1)^n}{n!\,2^n}k^n\right)$$

è convergente e, in caso affermativo, si calcoli la somma della serie.

Fissato qualsiasi n, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,k^n$ non converge, perché la successione dei termini generali non è infinitesima. Quindi la serie assegnata non comverge.

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(-1)^n}{n!\,2^n}k^n\right)$$

è convergente e, in caso affermativo, si calcoli la somma della serie.

Si ha, per ogni n fissato,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{k^n}{2^n}=e^{-\frac{k}{2}};$$

pertanto la serie assegnata è la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-e^{-\frac{1}{2}}\right)^k=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la superficie parametrizzata dalla funzione $\varphi : [-3,3] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi(s,t) = \left(s, s+t, \sqrt{t+1}\right)^T.$$

(i) Si determini l'equazione della retta ortogonale alla superficie nel punto $(0,0,1)^T$.

Si ha $\varphi(0, = (0,0,1)^T$.

Si calcolano le derivate di φ: $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = (1,1,0)^T$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (0,1,\frac{1}{2\sqrt{t+1}})^T$. Pertanto il vettore normale nel generico punto è

$$\nu(s,t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t+1}}, -\frac{1}{2\sqrt{t+1}}, 1\right)^T$$

e, in particolare, $\nu(0,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$. La retta cercata può ad esempio essere parametrizzatata come

$$\gamma(\tau) = (\tau, -\tau, 1+2\tau)^T.$$

(ii) Si determinino i punti di massimo e minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2z^2 - 2y^2 + 4xz^2 - 4x$ ristretta al sostegno della superficie φ.

Componendo le funzioni f e φ si ottiene la funzione $g(s,t) = s^2t - s^2 - 2t^2$.

Calcoliamo il gradiente $\nabla g(s,t = \left(2st - 2s, s^2 - 4t\right)^T$. I punti critici sono allora $(0,0)^T$, $(-2,1)^T$, $(2,1)^T$, e si verifica facilmente che $(0,0)^T$ è un punto di massimo con $g(0,0) = 0$, mentre gli altri due punti sono di sella.

Studiamo il comportamento della funzione sul bordo del dominio. Sui due segmenti orizzontali del bordo del dominio la funzione vale $h(s) = -2s^2 - 2$ nei punti $(s,-1)^T$ e $h(s) = -2$ nei punti $(s,1)^T$, con $|s| \leq 3$; pertanto il minimo è -20 e il massimo è -2. Sui due segmenti verticali del bordo del dominio la funzione vale $9t - 9 - 2t^2$ nei punti $(\pm 1, t)^T$, con $|t| \leq 1$; pertanto il minimo è -20 e il massimo è -2. Si conclude che il massimo della funzione f ristretta alla superficie è 0, mentre il minimo è -20.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Al variare del parametro $n \in \mathbb{N}$ si denoti con y_n la funzione che verifica l'equazione differenziale lineare

$$y_n'' - 2n\, y_n' = n$$

e inoltre soddisfa le condizioni $y_n(0) = y_n(1) = 0$.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini y_n.

Poniamo $z_n = y_n'$. L'equazione proposta diventa allora $z_n' - 2nz_n = n$ e si risolve facilmente. $z_n(x) = \lambda e^{2nx} - \frac{1}{2}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

y_n sarà una primitiva di z_n, pertanto

$$y_n(x) = \frac{\lambda}{2n} e^{2nx} - \frac{1}{2}x + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo le condizioni $0 = y_n(0) = y_n(1)$ otteniamo i valori dei parametri λ e c,

$$y_n(x) = \frac{e^{2nx} - 1}{2(e^{2n} - 1)} - \frac{1}{2}x.$$

(ii) Si calcoli il limite puntale della successione $(y_n)_n$ su $[0, 1]$.

Il limite puntuale è, per $x \in [0, 1[$,

$$y_\infty(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n(x-1)}(1 - e^{-2nx})}{2(1 - e^{-2n})} - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x,$$

mentre $y_\infty(1) = 0$.

($iiii$) Si stabilisca se la convergenza della successione $(y_n)_n$ è uniforme su $[0, 1]$.

La convergenza non può essere uniforme; se lo fosse, essendo continue tutte le funzioni y_n, anche il limite y_∞ dovrebbe essere una funzione continua, mentre non lo è essendo $\lim_{x\to1} y_\infty(x) = -\frac{1}{2} \neq y_\infty(1)$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = \big(y - z^2, 2x + z^3, z^2 - x - y\big)^T.$$

(*i*) Si calcolino il rotore e la divergenza di g.

$$rot\, g(x,y,z) = \big(-1 - 3z^2, -2z + 1, 1\big)^T.$$

$$div\, g(x,y,z) = 2z.$$

(*ii*) Si calcoli il flusso del campo g uscente dalla superficie chiusa $S = A \cup B \cup C$, dove

$$A = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2,\ x^2 + y^2 = 1 + z^2\};$$

$$B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0\}; \quad C = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 5,\ z = 2\}.$$

Per il teorema della divergenza si ha

$$\iint_S \langle g, n\rangle \, d\sigma = \iiint_K divg\, dxdydz,$$

dove $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2,\ x^2 + y^2 \le 1 + z^2\}$ è il solido che ha S come bordo.
L'integrale triplo si calcola facilmente per sezioni:

$$\iiint_K 2z\, dxdydz = \int_0^2 2z\pi(1 + z^2)\, dz = 12\pi.$$

(*iii*) Si calcoli il valore assoluto della circuitazione del campo lungo il bordo di C: $\oint_{\partial C} \langle g, \tau\rangle \, ds$.
Usando il teorema di Stokes si ha che

$$\oint_{\partial C^+} \langle g, \tau\rangle \, ds = \iint_C \langle rot\, g, n\rangle \, d\sigma.$$

Si ha $\langle rot\, g(x,y,z), (0,0,1)^T\rangle = 1$, pertanto si calcola facilmente

$$\iint_C 1\, dxdy = 5\pi.$$