Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di potenze nel campo complesso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(e^{-n})}{(i+n)^3}(z+i)^n.$$

(i) Si determini il raggio di convergenza della serie.
Usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(e^{-n-1})(z+i)^{n+1}}{(i+n+1)^3}\right| \cdot \left|\frac{(i+n)^3}{\operatorname{sen}(e^{-n})(z+i)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{i+n}{i+1+n}\right|^3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(e^{-n-1})}{e^{-n-1}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{e^{-n}}{\operatorname{sen}(e^{-n})}|z+i| = e^{-1}|z+i|,$$

e quindi il raggio di convergenza della serie è e.

(ii) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

La serie converge all'interno del disco di centro $-i$ e raggio e e non converge al suo esterno. Sulla circonferenza $|z+i| = e$ il termine generale della serie numerica dei moduli è infinitesimo di ordine 3, e quindi c'è convergenza anche sul bordo del disco. L'insieme di convergenza è pertanto il disco chiuso.

(ii) Si stabilisca se la serie converge nel punto reale $x = 3$.

Si ha $|3+i| = \sqrt{10} > e$, quindi la serie non converge in $z = 3$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^3 + y^2 + |x|y$.

(i) Si determini l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ dove la funzione è differenziabile e si calcoli, dove possibile, il gradiente di f.

La funzione è chiaramente differenziabile in tutti i punti $(x, y)^T$ in cui $x \neq 0$ e il gradiente è $\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, 2y + x)^T$ se $x > 0$, $\nabla f(x, y) = (3x^2 - y, 2y - x)^T$ se $x < 0$. Considerando per ogni y fissato i limiti delle derivate parziali per $x \to 0$ da destra e da sinistra, si vede che la funzione non è differenziabile nei punti $(0, y)$ se $y \neq 0$, mentre è differenziabile nell'origine con $\nabla f(0, 0) = (0, 0)^T$.

(ii) Si determinino eventuali punti critici di f, cioè punti $(x, y)^T$ in cui f è differenziabile e $\nabla f(x, y) = (0, 0)^T$.
I punti critici si ottengono risolvendo l'equazione $\nabla f(x, y) = (0, 0)^T$ e sono $(0, 0)^T$ e $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})^T$.

(iii) Tra i punti trovati in (ii) si stabilisca se vi sono eventuali punti di minimo o di massimo relativo di f.

Il punto $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})^T$ è di minimo come si vede studiando la matrice Hessiana

$$Hf(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si noti che la funzione non è due volte differenziabile in $(0, 0)^T$, non essendo definito il gradiente di f in alcun intorno dell'origine. Tuttavia è facile verificare che $(0, 0)^T$ non può essere né punto di minimo né punto di massimo, perché la restrizione di f all'asse x è $f(x, 0) = x^3$.

(iv) Si consideri la generica retta r_m passante per l'origine, di equazione $y = mx$. Si provi che nessuna restrizione di f alla retta r_m ammette nell'origine un punto di massimo relativo.

Si ponga $h(x) = f(x, mx)$. Si ha, per $x > 0$, $h(x) = x^3 + x^2(m^2 + m)$, $h'(x) = 3x^2 + 2x(m^2 + m)$, $h''(x) = 6x + 2(m^2 + m)$, mentre, per $x < 0$, $h(x) = x^3 + x^2(m^2 - m)$, $h'(x) = 3x^2 + 2x(m^2 - m)$, $h''(x) = 6x + 2(m^2 - m)$. Affiché $x = 0$ sia un punto di massimo relativo per la funzione h devono essere non positive in zero entrambe le derivate seconde destra e sinistra della funzione h, cioè deve valere $(m^2 + m) \leq 0$ e $(m^2 - m) \leq 0$. L'unica possibilità e allora $m = 0$, ma anche in questo caso, essendo $h(x) = x^3$, si conclude che $x = 0$ non è un punto di massimo relativo.

(v) Si verifichi che l'origine $(0, 0)^T$ non è un punto di sella per la funzione.

Immediato dal punto precedente.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ sia u_α la soluzione del problema di Cauchy

$$(CP) \begin{cases} y' = e^{2x-y}; \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Si stabilisca per quali valori di α la soluzione u_α è monotona sul suo dominio.

Poiché la funzione esponenziale è sempre positiva è immediato concludere che ogni soluzione è (strettamente) crescente.

(ii) Si determini α in modo tale che u_α sia un polinomio di grado ≤ 1.

Posto $u(x) = mx + q$ e sostituendo nell'equazione si ottiene $m = 2$ e $q = \alpha = -\log 2$.

(iii) Si calcoli la soluzione u_0 (per $\alpha = 0$).

L'equazione è a variabili separate e si ottiene facilmente $u_0(x) = \log \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$.

(iv) Si stabilisca per quali valori di α la soluzione u_α è convessa sul suo dominio.

Usando l'equazione per calcolare la derivata seconda della soluzione si ottiene $y'' = e^{2x-y}\big(2 - e^{2x-y}\big)$. Imponendo $y'' > 0$ si ottiene $y > 2x - \log 2$. Ricordando che la soluzione polinomiale con $\alpha = -\log 2$ è proprio $y = 2x - \log 2$, si deduce che per ogni dato iniziale $\alpha > -\log 2$ la soluzione u soddisferà in ogni punto $u(x) > 2x - \log 2$, per il principio di confronto delle soluzioni. Pertanto tali soluzioni saranno convesse su $\mathbb{R}$, mentre le soluzioni con $\alpha < -\log 2$ saranno concave sul loro dominio.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t\right)^T.$$

(In quanto segue può essere utile ricordare che $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \pi$)

(*i*) Si verifichi che γ è semplice e chiusa.

La curva è chiaramente chiusa essendo $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

Per verificare che la curva è semplice si impone $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ con $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, da cui $\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2$ e, di conseguenza, $\cos^3(t_1) = \cos^3(t_2)$, e quindi $(\cos t_1, \operatorname{sen} t_2)^T = (\cos t_2, \operatorname{sen} t_2)^T$ da cui $t_2 = t_2$.

(*ii*) Si stabilisca se γ è regolare.

Calcoliamo il vettore tangente $\gamma'(t) = (-3\cos^2(t) \operatorname{sen} t + \cos t, \cos t)^T$, che si annulla se $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$. Quindi la curva è regolare a tratti ma non ̀regolare.

(*iii*) Si calcoli l'area della regione piana racchiusa dal sostegno di γ.

Usando la nota formula dell'area si ottiene

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx')\, dt = \frac{3}{4}\pi,$$

dove, nel calcolo, si è utilizzata l'uguaglianza

$$\cos^4(t) = \cos^2(t) \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(t)) = \cos^2 t - \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2t).$$

(*iv*) Si calcoli l'integrale $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle\, ds$ dove $g(x, y) = (-y, x)^T$.

Dal conto precedente si ha subito $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle\, ds = 2A = \frac{3}{2}\pi$.