Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Scipio Cuccagna ◯ Prof. Franco Obersnel ◯

Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n+1} y^{-4n}.$$

(i) Si determini e si disegni nel piano xy l'insieme di convergenza della serie (cioè l'insieme $\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :$ esiste finito $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n+1} y^{-4n}\}$).

(ii) Si determini (come sviluppo in serie numerica) il numero

$$\iint_{[0,1]\times[2,3]} f(x,y)\, dxdy,$$

e si calcoli un valore approssimato di tale numero con un errore inferiore a 10^{-4}.

(iii) Si calcoli la somma $f(x,y)$.

ESERCIZIO N. 2. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$(CP) \qquad \begin{cases} ky'' + 2y' + ky = 1 \\ y(0) = 2k \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(i) Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali il problema (CP) non ha soluzioni.

(ii) Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione di (CP) è costante.

(iii) Si determini la soluzione di (CP) se $k = -1$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il campo vettoriale

$$g(x,y,z) = \left(3yz - \frac{y}{x^2+y^2},\, 3xz + \frac{x}{x^2+y^2},\, 3xy\right)^T.$$

(i) Si calcoli l'integrale della componente tangenziale di g lungo la curva $\gamma_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$.

(ii) Si calcoli l'integrale della componente tangenziale di g lungo la curva $\gamma_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_2(t) = (1,0,t)^T$.

(iii) Si calcoli il rotore di g.

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se il campo g è conservativo.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 + x + 1/2)e^{-x^2-y^2}$$

(i) Si determinino

- il gradiente di f:

- la matrice hessiana di f:

- i punti critici di f:

- la natura dei punti critici di f:

- $\sup f$ e $\inf f$ (si giustifichino le risposte):

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se il volume in senso generalizzato dell'insieme

$$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x,y)^T \in \mathbb{R}^2, 0 < z < f(x,y)\}$$

è finito.