

Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione “autunnale”, appello unico

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^x x^n.$$

(i) Si determini l’insieme di convergenza E della serie.

(ii) Si stabilisca se la serie converge uniformemente in E .

(iii) Detta $s(x)$ la somma della serie, si provi che $-\frac{1}{2} < s(-\frac{1}{2}) < 0$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y - 2)(y - 1).$$

(i) Si determinino

- il gradiente di f :

- la matrice hessiana di f :

- i punti critici di f :

- la natura dei punti critici di f :

(ii) Si determinino il massimo e il minimo della funzione f ristretta al disco

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri l'equazione lineare omogenea

$$(E) \quad y''' - 3y' + 2y = 0.$$

(i) Si determini lo spazio delle soluzioni dell'equazione (E).

(ii) Si determini una funzione $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $\varphi(x) = xe^x - x \sin x$ sia soluzione dell'equazione

$$y''' - 3y' + 2y = b(x).$$

(iii) Per tale scelta di b si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$(CP) \quad \begin{cases} y''' - 3y' + 2y = b(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la curva $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t))^T & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ (1 + \cos(t + \frac{\pi}{2}), 1 + \sin(t + \frac{\pi}{2}))^T & \text{se } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

(i) Si verifichi che γ è una curva semplice chiusa e si stabilisca se è regolare. Si disegni il sostegno di γ .

(ii) Si calcoli l’area della regione piana E racchiusa dalla curva.

(iii) Si calcoli il flusso del campo $g(x, y) = (x^2 + \log(y + 1), 2y(1 - x))^T$, attraverso γ secondo il verso della normale uscente.

ESERCIZIO 4 per il corso a 6 crediti Si calcoli l’area della regione piana $E = D_1 \cap D_2$, con

$$D_1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad D_2 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

(Potrebbe essere utile ricordare che la funzione $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\text{sen}(2x))$ è una primitiva della funzione $\cos^2(x)$ e la funzione $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\text{sen}(2x))$ è una primitiva della funzione $\text{sen}^2(x)$.)

RISULTATO

SVOLGIMENTO