Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.
Si consideri la successione di funzioni $\big(f_n\big)_n$, con $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) = \cos\big(\text{sen}\,(x^n)\big)$.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si calcoli la derivata $f_n'(x)$.

(ii) Si determini l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$.

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(iv) Si stabilisca se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

ESERCIZIO N. 2. Al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione del secondo ordine

$$(E) \quad y'' + (y')^2 - p\,y = 0.$$

(i) Si determini il valore del parametro $p \in \mathbb{R}$ per il quale l'equazione (E) ammette almeno una soluzione polinomiale monica di secondo grado (cioè una soluzione del tipo $y(x) = x^2 + bx + c$ con $b, c \in \mathbb{R}$).

(ii) Per il valore p determinato in (i) si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$(CP) \quad \begin{cases} y'' + (y')^2 - p\,y = 0 \\ y(0) = \frac{3}{2} \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

(iii) Si determini la soluzione y del problema di Cauchy

$$(CP) \quad \begin{cases} y'' + (y')^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume del solido

$$E = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right\}.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x^2 - 1) \text{ arctg } (y^2 - 4).$$

(i) Si determinino:

• il gradiente di f:

• la matrice hessiana di f:

• i punti critici di f:

• la natura dei punti critici di f:

• $\sup f$ e $\inf f$ (si giustifichino le risposte):

(ii) Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione f ristretta alla striscia $\mathbb{R} \times [-2, 2]$: