Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie a termini complessi $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nz}$.

(i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

Si tratta di una serie geometrica di ragione complessa e^z, quindi si chiede $|e^z| < 1$. Se $z = x + iy$ si ottiene pertanto la condizione $x < 0$.

(ii) Si calcoli la somma della serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n(i\pi-1)}$.

Si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^z\right)^n = \frac{1}{1-e^z}$.

Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n(i\pi-1)} = \frac{1}{1-e^{-1}e^{i\pi}} = \frac{e}{e+1}$.

(iii) Si calcoli la somma della serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} n\,e^{-n}$.

Per ogni numero reale $x < 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{nx} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-e^x} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}.$$

Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} n\,e^{-n} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$.

ESERCIZIO N. 2. Il motore di un razzo fornisce un'accelerazione a e comporta un consumo di carburante a^2 per ogni secondo. Detta $c > 0$ la capacità del serbatoio di carburante del razzo, questo può viaggiare pertanto fino al tempo t tale che $a^2 t = c$. Indicata con g la costante di gravità, l'altezza raggiunta dal razzo al tempo t è descritta dalla funzione $f(a,t) = \frac{1}{2}(a-g)t^2$.

(i) Si determini l'accelerazione ottimale a da imprimere al razzo, in modo da rendere massima l'altezza raggiunta.

Si vuole ottenere il massimo di f ristretta al vincolo $a^2 t = c$.

Poniamo $h(a,t) = a^2 t - c$. Calcoliamo $\nabla f = \left(\frac{1}{2}t^2, (a-g)t\right)^T$ e $\nabla h = \left(2at, a^2\right)^T$.

Risolvendo il problema di massimo vincolato si ottiene $a = \frac{4}{3}g$.

(ii) Si calcoli il tempo impiegato per raggiungere tale altezza.

Il tempo impiegato è $t = \frac{9c}{16g^2}$.

(iii) Se raddoppiamo la capacità c del serbatoio, di quanto aumenta l'altezza raggiunta?

L'altezza $f(a,t) = \frac{27c^2}{512g^3}$ dipende dal quadrato di c. Quindi raddoppiando la capacità c del serbatoio l'altezza raggiunta aumenta di quattro volte.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari

$$(E) \qquad \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - y + 2, \\ y' = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + 1. \end{cases}$$

(i) Si determini la soluzione $\big(x(t), y(t)\big)^T$ di (E), che verifica le condizioni iniziali $\big(x(0), y(0)\big)^T = \big(2, 1\big)^T$.

Poiché la funzione $f(x, y) = \big(-\frac{1}{2}x - y + 2, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + 1\big)^T$ si annulla nel punto $\big(2, 1\big)^T$, si tratta di un punto di equilibrio per l'equazione. Pertanto la soluzione è la costante $\big(2, 1\big)^T$.

(ii) Si determini la soluzione $\big(x(t), y(t)\big)^T$ di (E), che verifica le condizioni iniziali $\big(x(0), y(0)\big)^T = \big(1, 2\big)^T$.

Dalla prima equazione si ottiene

$$y = -\frac{1}{2}x - x' + 2.$$

Derivando la prima equazione e sostituendo alla y l'espressione ottenuta si ottiene l'equazione di secondo ordine

$$x'' + \frac{5}{6}x' - \frac{1}{6}x = -\frac{1}{3}.$$

Si trova facilmente la soluzione costante $x = 2$.
Le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea $\lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{6}$ sono -1 e $\frac{1}{6}$, pertanto le soluzioni dell'equazione sono $x(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{\frac{1}{6}t} + 2$, al variare di λ_1, λ_2 in $\mathbb{R}$. Dall'espressione ottenuta sopra si calcola

$$y(t) = \frac{1}{2}\lambda_1 e^{-t} - \frac{2}{3}\lambda_2 e^{\frac{1}{6}t} + 1.$$

Infine, imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$ si ottiene la soluzione

$$\big(x(t), y(t)\big)^T = \big(\frac{2}{7}e^{-t} - \frac{9}{7}e^{\frac{1}{6}t} + 2, \frac{1}{7}e^{-t} + \frac{6}{7}e^{\frac{1}{6}t} + 1\big)^T.$$

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli il volume del solido E delimitato dalle superfici

$$z = 2; \quad z = x^2 + 1; \quad y = 0; \quad x + y = 2;$$

RISULTATO

$$\frac{8}{3}$$

SVOLGIMENTO

L'insieme E può essere descritto come segue

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1,\, x^2 \leq z - 1 \leq 1,\, 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$

Si può integrare per corde rispetto al piano xy; posto $K = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 - x$, si avrà

$$Vol(E) = \iint_K 2 - (x^2 + 1)\, dxdy.$$

L'insieme K è normale rispetto all'asse x, pertanto si integra facilmente:

$$Vol(E) = \int_{[-1,1]} \left(\int_0^{2-x} 1 - x^2\, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2 \right) dx = \frac{8}{3}.$$