

Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione autunnale

COGNOME e NOME _____ **N. Matricola** _____

Anno di Corso _____ **Laurea in Ingegneria** _____

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_n$, con $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2}$.

(i) Si stabilisca se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[-1, 1]$.

(ii) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si calcoli la derivata $f'_n(x)$.

(iii) Si determini l'insieme di convergenza I della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$.

(iv) Si stabilisca se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge uniformemente sull'intervallo I .

ESERCIZIO N. 2. Al variare del dato iniziale $a \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$(CP_a) \quad \begin{cases} y' = \sqrt{-9y}, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

(i) Posto $a = 1$ si stabilisca, giustificando la risposta, se il problema (CP_a) ammette soluzione; in caso affermativo si determini una soluzione e si stabilisca se la soluzione è unica.

(ii) Posto $a = -1$ si stabilisca, giustificando la risposta, se il problema (CP_a) ammette soluzione; in caso affermativo si determini una soluzione e si stabilisca se la soluzione è unica.

(iii) Posto $a = 0$ si determini la soluzione y del problema di Cauchy (CP_a) che soddisfa l’ulteriore condizione $y(-1) = -1$.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il solido

$$E = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\}.$$

Si vuole asportare dal solido E la parte contenuta nel cilindro di raggio r $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ in modo tale che il volume del solido ottenuto sia $\frac{\pi}{4}$. Si determini r .

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + a \cdot xy + 1,$$

con $a \in \mathbb{R}$.

(i) Si determinino:

- il gradiente di f :

- la matrice Hessiana di f :

- i punti critici di f :

- la natura dei punti critici di f :

(ii) Per quali valori del parametro a il grafico di f viene modificato anche qualitativamente in modo significativo?