Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Scipio Cuccagna ◯ Prof. Franco Obersnel ◯
Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n^{\alpha}}.$$

(i) Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme di convergenza della serie.

(ii) Nel caso $\alpha = 0$, si stabilisca se la serie converge uniformemente sul suo insieme di convergenza.

(iii) Nel caso $\alpha = 1$, si calcoli la somma della serie.

(iv) Nel caso $\alpha = 2$, si stabilisca se la serie converge uniformemente sul suo insieme di convergenza.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log \sqrt{x^2+y^2}.$$

(i) Si calcoli il gradiente ∇f di f:

(ii) Si calcoli il laplaciano Δf di f:

(iii) Si consideri il campo vettoriale $g(x,y) = \nabla f(x,y) + \left(\frac{x^3}{3} + y, 2x\right)^T$.
Si calcoli il flusso $\int_T \langle g, n \rangle \, ds$ di g attraverso il bordo orientato secondo la normale esterna n del triangolo T di vertici $(0,2)^T, (1,1)^T, (3,3)^T$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$(CP) \qquad \begin{cases} y' + \dfrac{1}{x-3}y = \dfrac{1}{x+1}y^2; \\ \\ y(0) = a. \end{cases}$$

(i) Si risolva il problema (CP) nel caso $a = 0$, specificando il dominio della soluzione.

(ii) Si risolva il problema (CP) nel caso $a = \frac{1}{3}$, specificando il dominio della soluzione.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y - 2y^3 - x^2.$$

(i) Si determinino

- il gradiente di f:

- la matrice Hessiana di f:

- i punti critici di f:

(ii) Si verifichi che $(0, 0)^T$ è punto di massimo relativo per tutte le restrizioni di f alle rette di equazione $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$.

(iii) Si verifichi che $(0, 0)^T$ non è punto di massimo relativo per f.

(iv) Si studi la natura dei punti critici di f.