

Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di potenze $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{4^n - 2^n} t^n$.

(i) Si determini l’insieme di convergenza E della serie.

(ii) Si stabilisca se la convergenza di f su E è uniforme.

(iii) Si consideri la funzione $g(x) = \int_1^x f(t) dt$.

Si scriva $g(0)$ come serie numerica e si provi che $-1 < g(0) < -\frac{7}{12}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 e^y - xy$.

(i) Si calcolino gradiente e matrice Hessiana di f .

(ii) Si determinino eventuali punti critici di f .

(iii) Si studi il carattere dei punti critici di f . Nel caso di punti di sella si indichino due direzioni lungo le quali la funzione ammette minimo / massimo.

(iv) Sia $L_1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$ la linea di livello 1 della funzione f . Si trovino i punti di intersezione tra l’asse x e L_1 e si verifichi che L_1 non è un insieme connesso (per archi).

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3.

(i) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - (\alpha + 3)y' + 3\alpha y = 0; \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(ii) Nel caso $\alpha = 0$ si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' = e^{3t}; \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri l’insieme

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \frac{1}{1+x} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}.$$

(i) Si calcoli l’area di E .

(ii) Si calcoli il volume del solido di \mathbb{R}^3 ottenuto ruotando di un angolo giro l’insieme E intorno all’asse y .