**Esame di Analisi matematica II : esercizi**

**Dr. Franco Obersnel**

**Sessione estiva, I appello**

**COGNOME e NOME** ______________________ **N. Matricola** __________

**Anno di Corso** ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

**Si risolvano gli esercizi :** **1** ◯ **2** ◯ **3** ◯ **4** ◯ **5** ◯ **6** ◯

**ESERCIZIO N. 1.** Si ponga, per $n \in \mathbb{N}^+$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{n\,e^x}{n + x^2}.$$

$(i)$ Si calcoli, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

$(ii)$ Si provi che la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente in ogni intervallo superiormente limitato.

$(iii)$ Si provi che la successione $(f_n)_n$ non converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1}{1 + y^2}.$$

($i$) Si determinino

- il gradiente di $f$:

- la matrice Hessiana di $f$:

- i punti critici di $f$:

- la natura dei punti critici di $f$:

- gli estremi assoluti di $f$:

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** __________

**ESERCIZIO N. 3.** Si calcoli la massa del toro

$$T = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |z| \le r, R - \sqrt{r^2 - z^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le R + \sqrt{r^2 - z^2} \right\},$$

con $0 < r < R$, avente densità $\mu(x,y,z) = |z|$.

**RISULTATO**

**SVOLGIMENTO**

**ESERCIZIO N. 4.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = xe^y + ye^x.$$

($i$) Si provi che $\Gamma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ è il sostegno di una curva regolare in forma implicita.

($ii$) Si provi che, in un intorno di $(0, 0)^T$, $\Gamma$ è il grafico di una funzione $y = g(x)$.

($iii$) Si calcolino $g'(0)$ e $g''(0)$.

($iv$) Si provi che, in un intorno di $(0, 0)^T$, $\Gamma \subseteq \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$.

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** ____________

**ESERCIZIO N. 5.** Si determini una soluzione definita su $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \sqrt{1-(y')^2} \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

**RISULTATO**

**SVOLGIMENTO**

**ESERCIZIO N. 6.** Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$g(x,y,z) = (2x + yz, 2xz + y, xy + 2z)^T$$

attraverso il sostegno $\Sigma$ della superficie ellissoidale $\varphi : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi(u,v) = (\sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 3 \cos u)^T \, .$$

**RISULTATO**

**SVOLGIMENTO**