Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso del Dr. Franco Obersnel
Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per $x \in [0, +\infty[$ si consideri la funzione a valori complessi

$$f_n(x) = \frac{i + e^{-x}}{n^2 + i\,nx}.$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(ii) Si stabilisca se la serie converge uniformemente su E.

ESERCIZIO N. 2. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si considerino la funzione $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g_a(x, y) = 4y^3 - x^2 - ay + 2x$$

e la curva Γ_a definita da

$$\Gamma_a = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : g_a(x, y) = 0\}.$$

(*i*) Si determinino, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

- il gradiente di g_a:

- i punti critici di g_a:

(*ii*) Si determinino i parametri $a \in \mathbb{R}$ tali che Γ_a è il sostegno di una curva regolare in forma implicita.

(*iii*) Si ponga $a = 0$. Si verifichi che la curva Γ_0 può essere rappresentata come grafico di un'opportuna funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\Gamma_0 = \{(x, h(x))^T \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Si determini h.

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri, per $x > 0$, l'equazione differenziale

$$(E) \qquad y' = \frac{y}{x}(y-1).$$

(i) Si trovino gli equilibri (cioè le soluzioni costanti) dell'equazione (E).

(ii) Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$(PC_a) \begin{cases} y' = \frac{y}{x}(y-1), \\ y(1) = a. \end{cases}$$

• Si determinino i parametri $a \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione y di (PC_a) è crescente.

• Si giustifichi il fatto che, per ogni $a \in [0, 1]$, la soluzione y di (PC_a) è limitata.

(iii) Si ponga $a = \frac{1}{2}$. Si calcoli la soluzione y di $(PC_{\frac{1}{2}})$.

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli il volume del solido

$$E = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}y^2} - 1 \le z \le 1 - x^2 - \frac{1}{4}y^2 \right\}.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO