Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^x \cdot 2^{-nx}$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

La successione $\left(n^x \cdot 2^{-nx}\right)_n$ non è infinitesima se $x \leq 0$, mentre è infinitesima di ordine soprareale se $x > 0$. Pertanto l'insieme di convergenza della serie è $]0, +\infty[$.

(ii) Si calcolino esplicitamente, se possibile, i valori $f(0)$ e $f(1)$.

La funzione non è definita in 0, quindi non è possibile calcolare $f(0)$.

Per quanto riguarda $f(1)$ si osservi che, se $|z| < 1$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, z^n = z \frac{d}{dz} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Pertanto

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

(iii) Si calcolino, se possible, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Poiché il dominio della funzione f è inferiormente limitato non ha significato considerare $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Per quanto riguarda $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ osserviamo che la serie converge uniformemente sull'intervallo $[1, +\infty[$, come si deduce facilmente applicando l'M-test di Weierstrass (si osserva ad esempio che

$$|n^x 2^{-nx}| \leq n 2^{-n}$$

per ogni $x \in [1, +\infty[$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, e la serie di termine generale $n2^{-n}$ è convergente). Possiamo allora applicare il teorema dei due limiti e concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} n^x \cdot 2^{-nx} = 0.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy - x^2y^2.$$

(i) Si calcoli il gradiente di f.

$$\nabla f(x,y) = \left(y - 2xy^2, x - 2x^2y\right)^T$$

(ii) Si calcoli la matrice Hessiana di f.

$$\begin{pmatrix} -2y^2 & 1-4xy \\ 1-4xy & -2x^2 \end{pmatrix}$$

(iii) Si determinino i punti critici di f.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y(1-2xy) = 0 \\ x(1-2xy) = 0 \end{cases}$$

si ottengono i punti $(0,0)^T$ e $(t, \frac{1}{2t})^T$ con $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

(iv) Per ogni parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si determinino gli estremi inferiore e superiore della funzione f ristretta alla retta di equazione $y = \alpha$.

Sia $\alpha = 0$. La funzione f ristretta alla retta di equazione $y = 0$ è la costante 0.
Sia ora $\alpha \neq 0$. Posto $h(x) = f(x,\alpha)$ si trova facilmente un unico punto critico di h in $x = \frac{1}{2\alpha}$; questo è un punto di massimo per la funzione h; il valore massimo è $\frac{1}{4}$ e non dipende da α. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.
Pertanto si conclude che $\inf h = -\infty$ e $\sup h = \max h = \frac{1}{4}$.

(v) Si determini il carattere dei punti critici trovati in (iii).

Si osserva da quanto visto in (iv) che $\max f = \frac{1}{4}$.

Poiché $f(t, \frac{1}{2t}) = \frac{1}{4}$ tutti questi punti sono di massimo assoluto (non stretto) per f.

Per quanto riguarda l'origine, calcolando la matrice Hessiana nel punto $(0,0)^T$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il differenziale secondo in $(0,0)^T$ è una forma quadratica indefinita e si conclude che l'origine è un punto di sella.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3.

(i) Si utilizzi il cambio di variabile $u = y - x$ per risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-x)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Posto $u = y - x$ si ottiene $y' = u' + 1$, pertanto il problema si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} u' = u^2 - 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separate e si può risolvere dividendo per $u^2 - 1$ e integrando da 0 a x:

$$\int_0^x \frac{u'}{u^2-1}\,dt = x$$

da cui facilmente

$$\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = 2x$$

e quindi, osservando che, essendo $u(0) = 0$, si ha $\left|\frac{u(x)-1}{u(x)+1}\right| = \frac{1-u(x)}{u(x)+1}$ in un intorno di 0, si calcola

$$u(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}.$$

Si ottiene infine

$$y(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} + x.$$

(ii) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-x)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Come nel caso precedente si vuole risolvere

$$\begin{cases} u' = u^2 - 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

In questo caso si ha immediatamente la soluzione costante $u = 1$, pertanto la soluzione è

$$y(x) = x + 1.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la regione piana E definita da

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1 - |x|^3\}$$

(*i*) Si calcoli l'area della regione E.

Si osserva che la regione E è normale rispetto all'asse x e si può scrivere come

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], |x|^3 - 1 \leq y \leq 1 - |x|^3\}.$$

Per ragioni di simmetria l'area di E è uguale a quattro volte l'area della porzione di E contenuta nel primo quadrante. Pertanto

$$Area = 4 \int_0^1 (1 - x^3)\, dx = 3.$$

(*ii*) Sia γ la curva regolare semplice che ha come sostegno il bordo di E contenuto nel primo quadrante. Si calcoli l'integrale di linea

$$\int_\gamma \big(1 - y\big)\, ds$$

Si può parametrizzare la curva γ come segue: $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (t, 1 - t^3)^T.$$

Si ha $\gamma'(t) = (1, -3t^2)^T$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 9t^4}$.
Pertanto

$$\int_\gamma \big(1 - y\big)\, ds = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 9t^4}\, dt = \frac{1}{36} \int_1^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{54}(10^{3/2} - 1).$$