Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel
Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_n$, con

$$n \geq 1, \qquad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + x^2}.$$

(i) Si determini l'insieme sui cui $(f_n)_n$ è puntualmente convergente e se ne calcoli il limite puntuale.

(ii) Si provi che $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su tutto l'insieme di convergenza puntuale.

(iii) Si verifichi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n$ è puntualmente convergente su $[-1, 1]$.

(iv) Si verifichi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n$ è uniformemente convergente su $[-1, 1]$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 2(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4).$$

Si determinino

- il gradiente di f:

- la matrice Hessiana di f:

- eventuali punti critici di f:

- la natura dei punti critici di f:

- il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione f nel punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$:

- (giustificando la risposta) $\inf f$:

- (giustificando la risposta) $\sup f$:

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$(E) \qquad y' = 2xy + 4x.$$

(i) Si determini la soluzione y di (E) che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 0$.

(ii) Si calcoli $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$, dove y è la soluzione del punto (i).

(iii) Si determinino le soluzioni costanti (equilibri) di (E).

(iv) Si determinino tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione y di (E) che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = \alpha$ sia positiva (cioè $y(x) > 0$ per ogni x appartenente al dominio di y).

ESERCIZIO N. 4.

(i) Si consideri il campo vettoriale

$$g(x, y) = \left(x^2 + y^2, 2xy\right)^T.$$

• Si stabilisca, motivando la risposta, se g è conservativo. In caso di risposta affermativa si calcoli un suo potenziale.

• Si calcoli la divergenza di g.

(ii) Si consideri la curva

$$\gamma : [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}] \to \mathrm{I\!R}^2, \qquad \gamma(t) = \left(|t|,\ \mathrm{sen}\,(t|t|)\right)^T.$$

• Si verifichi che γ è una curva semplice, chiusa, regolare a tratti.

• La regione E limitata del piano il cui bordo ∂E è il sostegno della curva γ si può descrivere come dominio normale rispetto all'asse x del tipo

$$E = \{(x, y)^T \in \mathrm{I\!R}^2 : x \in [0, \sqrt{\pi}], -\varphi(x) \le y \le \varphi(x)\},$$

dove $\varphi : [0, \sqrt{\pi}] \to \mathrm{I\!R}$ è un'opportuna funzione continua. Si determini tale funzione φ.

(iii) Si calcolino la circuitazione $\displaystyle\oint_\gamma \langle g, \tau\rangle\, ds$ e il flusso $\displaystyle\int_\gamma \langle g, n\rangle\, ds$,
dove g è il campo considerato in (i) e γ è la curva considerata in (ii) (qui τ denota il versore tangente e n denota il versore normale di γ).