Esame di Analisi matematica II : esercizi

Dr. Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Si risolvano gli esercizi : **1** ◯ **2** ◯ **3** ◯ **4** ◯ **5** ◯ **6** ◯

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza della serie.

(ii) Si calcoli la somma della serie.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = (x-y)^2(x^2+y^2-1).$$

(i) Si determinino

• i segni di f:

• il gradiente di f:

• i punti critici di f:

(ii) Si provi che f ha esattamente due punti di minimo relativo in senso stretto.

(iii) Si determinino $\inf f$ e $\sup f$, specificando se sono, rispettivamente, il minimo assoluto e il massimo assoluto di f.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la massa del solido

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4\}$$

avente densità $\delta(x, y, z) = |x| + |y|$.

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T. \end{cases}$$

(*i*) Si calcolino tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)^T$.

(*ii*) Si stabilisca se f è differenziabile in $(0,0)^T$.

(*iii*) Si stabilisca se l'insieme di livello $L_1\{(x,y)^T : f(x,y) = 1\}$ è il sostegno di una curva regolare in forma implicita.

(*iv*) Si determinino la retta tangente e la retta normale a L_1 nel punto $(2,2)^T$.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 5. Si determini, al variare del parametro $p > 0$, l'unica soluzione non negativa del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y|^p \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

specificando il massimo intervallo su cui tale soluzione esiste.

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 6. Si consideri il campo vettoriale

$$g(x,y) = \left(ye^{x^2y^2}, xe^{x^2y^2}\right)^T.$$

(i) Si calcoli il rotore di g.

(ii) Si stabilisca se g è conservativo su $\mathbb{R}^2$.

(iii) Si calcoli $\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle \, ds$ con $\gamma_1(t) = (t, 0)^T$, $t \in [-1, 1]$.

(iv) Si calcoli $\int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle \, ds$ con $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, \pi]$.