Esame di Analisi matematica II

Prova di esercizi

Corso del Prof. Franco Obersnel

Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ________	**Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la funzione complessa

$$f(z) = e^{iz} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n} z^n.$$

(i) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin di f.

Si ha, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$$

da cui

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} i^n \big(\frac{1}{n!} - \frac{1}{n}\big) z^n.$$

(ii) Si determini il raggio di convergenza dello sviluppo.

Il raggio di convergenza della serie esponenziale è infinito, quindi è sufficiente considerare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n}$$

che ha raggio di convergenza 1 come ben noto e verificabile ad esempio con il criterio del rapporto o della radice $n-$esima.

(iii) Si stabilisca se lo sviluppo converge nei punti $z = i$ e $z = -i$.

Si osservi che $i^n \cdot i^n = (-1)^n$. Se $z = i$ la serie è convergente perché somma di due serie che verificano le condizioni del teorema di Leibniz

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Si osservi che $i^n \cdot (-i)^n = 1$. Se $z = -i$ la serie non è convergente perché somma di una serie convergente e di una serie armonica divergente:

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : T \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2xy - 2x^2 - y$$

dove $T \subset \mathbb{R}^2$ è il triangolo "pieno" di vertici $(0,0)^T, (3,3)^T, (-3,3)^T$. Si calcolino il minimo e il massimo assoluti di f su T.

Si ha

$$T = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-3,3],\ |x| \le y \le 3\}.$$

Cerchiamo eventuali punti critici all'interno del dominio.

$$\nabla f(x,y) = (2y - 4x, 2x - 1)^T.$$

Il gradiente di f si annulla nel punto $(\frac{1}{2}, 1)^T$, appartenente al dominio. Si ha quindi un primo punto da considerare. Si ha $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{2}$.

Studiamo il comportamento di f sul bordo di T, che è costituito da 3 segmenti.

Sul primo segmento si ha, per $x \in [-3,0]$, $y = -x$, la funzione diventa

$$f(x) = -4x^2 + x,$$

che ha massimo in 0 e minimo in $x = -3$. Si ottengono pertanto i punti $(-3,3)^T$ e $(0,0)^T$, con valori della funzione -39 e 0.

Sul secondo segmento si ha, per $x \in [0,3]$, $y = x$, la funzione diventa

$$f(x) = -x,$$

che ha massimo in 0 e minimo in $x = 3$. Si ottengono pertanto i punti $(3,3)^T$ e $(0,0)^T$, con valori della funzione -3 e 0.

Sul segmento orizzontale si ha, per $x \in [-3,3]$, $y = 3$, la funzione diventa

$$f(x) = 6x - 2x^2 - 3,$$

che ha massimo in $\frac{3}{2}$ e minimo in -3. Si ottengono pertanto i punti $(\frac{3}{2}, 3)^T$ e $(-3,3)^T$, con valori della funzione $\frac{3}{2}$ e -39.

Confrontando i valori della funzione nei punti trovati si deduce che il massimo della funzione è $\frac{3}{2}$ mentre il minimo è -39.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

(i) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione lineare del primo ordine

$$y' = 2xy - 2x^3.$$

La soluzione dell'equazione omogenea associata è la funzione e^{x^2}. Le soluzioni si ottengono pertanto al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ dalla formula

$$y(x) = \lambda e^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x -e^{-t^2}\, 2t^3\, dt.$$

Si calcola facilmente l'integrale, ponendo $s = t^2$

$$\int_0^x -e^{-t^2}\, 2t^3\, dt = \int_0^{x^2} -e^{-s}\, s\, ds = \left[e^{-s}\, s + e^{-s}\right]_0^{x^2} = e^{-x^2}\, x^2 + e^{-x^2} - 1.$$

Pertanto

$$y(x) = \mu e^{x^2} + x^2 + 1,$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$ (qui abbiamo posto $\mu = \lambda - 1$ per comodità).

(ii) Tra le soluzioni determinate in (i) si trovi quella che verifica la condizione iniziale $y(0) = 1$.
Imponendo la condizione si ottiene subito $\mu = 0$ e $y(x) = x^2 + 1$.

(iii) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = -xu + x^3 u^3; \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

L'equazione è di Bernoulli. Posto $y = u^{-2}$ si osserva che $y' = -2u^{-3}u'$; pertanto, moltiplicando l'equazione per $-2u^{-3}$ si ottiene esattamente l'equazione risolta in (i) con la condizione iniziale $y(0) = 1$. Si ha dunque $y(x) = x^2 + 1$ e quindi $u(x) = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la regione piana D definita da

$$D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\}$$

(i) Si calcoli l'area generalizzata della regione D.

L'area si calcola con l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = +\infty$$

essendo la funzione $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ infinitesima di ordine 1 per $x \to \pm\infty$.

(ii) Sia E il solido di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando l'insieme D intorno all'asse x. Si calcoli il volume generalizzato di E.

Il volume si calcola con un integrale generalizzato. Integriamo per sezioni rispetto all'asse x. La sezione S_x è il cerchio di raggio $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Si ha pertanto

$$\iiint_E dm = 2 \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \pi \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi^2.$$

(iii) Si consideri la superficie $S = \partial E$, bordo di E. Una possibile parametrizzazione di S è $\varphi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,\vartheta) = \big(x, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cos\vartheta, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{sen}\vartheta\big).$$

Si calcoli il vettore normale $\nu(x,\vartheta)$. Le derivate parziali di φ sono

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \Big(1, -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\vartheta, -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen}\vartheta\Big)^T$$

e

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \Big(0, -\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1+x^2}}\Big)^T$$

pertanto $\nu(x,\vartheta) = \Big(-\frac{x}{(1+x^2)^2}, -\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1+x^2}}, -\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\sqrt{1+x^2}}\Big)^T$.

(iv) Si stabilisca se l'area generalizzata di S è finita o infinita.

È infinita, perché l'area è uguale all'integrale generalizzato

$$\iint_{\mathbb{R}\times[0,2\pi]} \sqrt{\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{1}{1+x^2}}\, dx d\vartheta,$$

e l'argomento nell'integrale è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to \pm\infty$.