Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione "autunnale", appello unico

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} x^{2n+1}.$$

(i) Si determini l'insieme di convergenza E della serie.

$\mathbb{R}$. Si vede facilmente utilizzando il criterio del rapporto o dell'ordine di infinitesimo.

(ii) Si stabilisca se la convergenza della serie su E è uniforme.

No. Se così fosse la successione $\frac{1}{n!\,2^n}x^{2n+1}$ dovrebbe essere uniformemente infinitesima. Tuttavia, fissato ad esempio $\varepsilon = 1$, basterà scegliere ad esempio $x = 2(n!)$ per rendersi conto che $\frac{1}{n!\,2^n}(2^n)(n!)2^{n+1}(n!)^{2n} > 1$.

(iii) Detta $y(x)$ la somma della serie, si calcolino le derivate y' e y''.

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(2n+1)x^{2n};$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(2n+1)(2n)x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(-1)^n}{(n+1)\cdot n!\,2\cdot 2^n}(2n+3)2(n+1)x^{2n+1}.$$

(iv) Si verifichi che y è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che le condizioni iniziali sono soddisfatte. Inoltre, si calcola

$$y'' + xy' + 2y = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{-(-1)^n}{(n+1)\cdot n!\,2\cdot 2^n}(2n+3)2(n+1)x^{2n+1} + \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(2n+1)x^{2n+1} + 2\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}x^{2n+1}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}\Big(-(2n+3) + (2n+1) + 2\Big)x^{2n+1} = 0$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri, definita sull'insieme

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1;\ |y| \geq 1\},$$

la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3y$.

(i) Si stabilisca se l'insieme E è compatto e/o connesso.

L'insieme è compatto ma non connesso. L'insieme E è costituito da due componenti connesse, una superiore E_{sup} e una inferiore E_{inf}, che sono porzioni chiuse di ellisse, simmetriche rispetto all'asse delle x.

(ii) Si determinino eventuali punti critici di f interni ad E, e se ne studi il carattere.

Si ha $\nabla f(x, y) = (2x, 2y + 3)^T$. L'unico punto critico della funzione è il punto $(0, -\frac{3}{2})^T$ che è interno ad E ed è un punto di minimo relativo. Si ha $f(0, -\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}$.

(iii) Si determinino il minimo e il massimo (assoluti) di f su E.

Poiché il dominio è compatto e la funzione è continua, esistono necessariamente il minimo e il massimo di f su E. Studiamo il problema sul bordo di E_{sup}. Tale bordo è unione di un arco di ellisse e di un segmento. Sull'arco di ellisse, con $1 \leq y \leq 2$, la funzione diventa $h(y) = 1 + \frac{3}{4}y^2 + 3y$ che ha punti di estremo in $(0, 1)^T$ e $(0, 2)^T$. In alternativa si poteva usare il teorema del moltiplicatore di Lagrange; impostando il sistema si ottiene

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y + 3 = \lambda \frac{1}{2} y \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

L'unico punto critico accettabile è $(0, 2)^T$, al quale si devono aggiungere gli estremi dell'arco $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)^T$.

Si ha $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1) = \frac{19}{4}$ e $f(0, 2) = 10$.

Sul segmento $(x, 1)^T$, con $|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, la funzione diventa $h(x) = x^2 + 4$, che ha minimo in $x = 0$ con valore $f(0, 1) = 4$ e massimo nei punti $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)^T$, con valore $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1) = \frac{19}{4}$.

La funzione ristretta alla componente connessa superiore di E ha quindi minimo in $(0, 1)^T$ con valore 4 e massimo in $(0, 2)^T$ con valore 10.

In modo simile si studiano i punti di massimo e minimo sul bordo di E_{inf}. Si trova il valore minimo nei punti $(0, -1)^T$ e $(0, -2)^T$, con valore -2 , e il massimo nei punti $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)^T$ con valore $-\frac{5}{4}$. Si osservi che $-\frac{9}{4} < -2$, pertanto il minimo di f su E_{inf} è assunto all'interno. Il valore massimo è invece $-\frac{5}{4}$.

In definitiva si ha $\min f_{E_{sup}} = 4$, $\max f_{E_{sup}} = 10$; $\min f_{E_{inf}} = -\frac{9}{4}$, $\max f_{E_{inf}} = -\frac{5}{4}$ e quindi $\min f_E = -\frac{9}{4}$, $\max f_E = 10$.

(iv) Si determini l'insieme immagine di f: $f(E)$.

Si presti attenzione al fatto che il dominio di f non è connesso, quindi non è detto che l'insieme immagine sia un intervallo. Tuttavia, per il teorema di connessione, essendo f continua, l'immagine della restrizione di f ad ogni componente di E è un intervallo (di estremi i rispettivi minimo e massimo). Pertanto abbiamo

$f(E) = f(E_{inf} \cup E_{sup}) = f(E_{inf}) \cup f(E_{sup}) = [-\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}] \cup [4, 10]$.

COGNOME e NOME ______________________________

ESERCIZIO N. 3. Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri il campo vettoriale

$$g : \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}^2$$

definito da

$$g(x,y) = \big(\frac{y}{x} - \log(xy) + ay, \log(xy) - \frac{x}{y} + bx\big)^T.$$

(i) Si calcolino divergenza e rotore di g.

$$div\, g = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}$$

$$rot\, g = (0, 0, b - a)^T$$

(ii) Si determinino i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali il campo g risulta essere conservativo.

Poiché il dominio di g è stellato, avremo che g è conservativo se e solo se è irrotazionale. Poniamo dunque $rot\, g = 0$. Pertanto g è conservativo per ogni $a \in \mathbb{R}$, $b = a$.

(iii) Per i valori dei parametri determinati in (ii) si calcoli un potenziale di g.
Integrando la prima componente del campo rispetto a x si ottiene

$$U(x,y) = y \log x - x \log y - x \log x + x + axy + \varphi(y)$$

con $\varphi(y)$ una qualsiasi funzione derivabile. Derivando U rispetto alla y e uguagliando alla seconda componente del campo si ottiene l'equazione

$$\log x - \frac{x}{y} + ax + \varphi'(y) = \log x + \log y - \frac{x}{y} + ax$$

da cui $\varphi(y) = y \log y - y$ e si ottiene il potenziale

$$U(x,y) = y \log x - x \log y - x \log x + x + axy + y \log y - y = (y - x)(\log xy - 1) + axy.$$

(iv) Per i valori $a = b = 0$ si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds$,
dove $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ è il semicerchio $\gamma(t) = \big(2 + \cos t, 2 + \operatorname{sen} t\big)^T$.
Poiché il campo è conservativo si ha

$$\int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = U(1, 2) - U(3, 2) = \log 12 - 2.$$

ESERCIZIO N. 4. Per ogni numero naturale positivo $n \in \mathbb{N}^+$ si consideri l'insieme del piano

$$A_n = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 4, \, 0 \leq x \leq y \leq nx\}.$$

(i) Si calcoli l'area di A_n:

In coordinate polari, $x = \rho \cos\vartheta, y = \rho \operatorname{sen}\vartheta$, si ottengono le limitazioni

$$1/n \leq \rho \leq 2, \, 0 \leq \cos\vartheta \leq \operatorname{sen}\vartheta \leq n \cos\vartheta,$$

da cui

$$Area(A_n) = \int_{\frac{1}{n}}^{2} \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} n} \rho \, d\vartheta \Big) \, d\rho = \frac{1}{2}\big(4 - \frac{1}{n^2}\big)(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{4}).$$

(ii) Al variare di n si consideri l'insieme

$$E_n = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x,y)^T \in A_n, \, \frac{1}{n} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Si calcoli l'integrale triplo

$$I_n = \iiint_{E_n} \frac{z}{x^2+y^2} \, dxdydz.$$

Integrando per corde su A_n si ottiene

$$I_n = \iint_{A_n} \Big(\int_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{z}{x^2+y^2} \, dz \Big) dxdy = \iint_{A_n} \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{n^2(x^2+y^2)}\big) dxdy$$

$$= \frac{1}{2} Area(A_n) - \frac{1}{2n^2}\Big(\big(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{4}\big) \log(2n) \Big).$$

(iii) Si calcoli $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n =$

$$= \frac{\pi}{4}$$