Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi

Corso del prof. Franco Obersnel
Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________	

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si risolva il problema di Cauchy

$$u' = t + tu^2, \quad u(0) = 1.$$

(ii) Si risolva, al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il problema di Cauchy

$$u' = \frac{t}{n}(1 + u^2), \quad u(0) = 1.$$

(iii) Sia u_n la soluzione del problema di Cauchy del punto precedente. Si provi che la successione $(u_n)_n$ converge puntulmente sull'intervallo $[0, 1]$. Si determini il limite puntuale.

(iv) Si provi che la convergenza al punto precedente è uniforme.

ESERCIZIO N. 2. Sia R un numero reale positivo. Si consideri la curva

$$\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \phi(t) = (R\cos t, R\sin t, t)^T.$$

(i) Si calcoli la lunghezza di ϕ.

(ii) Si provi che il sostegno della curva ϕ giace su un cilindro.

(iii) Posto $\phi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T$ si calcoli l'area della superficie cilindrica

$$\Big\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^T = (x(t), y(t))^T,\ 0 \le z \le z(t), t \in [0, 2\pi]\Big\}.$$

(iv) Si consideri il campo vettoriale $g(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, con $f(x, y, z) = x^2 \mathrm{sen}\,(xy^2) + z$. Si calcoli $\int_\phi \langle g, \tau\rangle\, ds$. (Qui τ indica il versore tangente di ϕ.)

COGNOME e NOME ____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x-y) + \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

(i) Si determinino:

• il gradiente di f:

• la matrice Hessiana di f:

• eventuali punti critici di f e la loro natura:

• $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) =$

• $\inf f =$

• $\sup f =$

(ii) Si consideri l'equazione differenziale

$$(E) \quad u' = f(x,u).$$

• Si provi che tutte le soluzioni di (E) sono definite globalmente su $\mathbb{R}$.

• Si provi che tutte le soluzioni di (E) sono crescenti.

ESERCIZIO N. 4.

(i) Si calcoli il volume della calotta sferica

$$E = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 8 - 2z \right\}.$$

(ii) Supponedone la densità pari a $\rho(x, y, z) = 4 - 2z$, si calcoli la massa del solido

$$\tilde{E} = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq 0 \quad \wedge \quad 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8 - 2z \right\}.$$